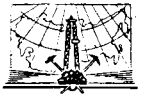
VISIT…

В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ, К. С. БАСНИЕВ,
А. Т. ГОРБУНОВ, Г. А. ЗОТОВ

МЕХАНИКА НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»
Москва, 1970

УДК 551 · 25 : 622.275

Механика насыщенных пористых сред. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. М., изд-во «Недра», 1970, 339 стр.

В книге в едином изложении даны исходные понятия и основные представления механики деформируемых пористых сред, используемые в нефтегазопромысловом и в горном деле, а также в строительстве, акустике, химической промышленности и других областях техники, где приходится иметь дело с многофазными средами. Оригинальные результаты авторов дополнены подробным обзором мировой литературы.

Приводится вывод фундаментальных уравнений движения, реологии и термодинамики многофазных сред. Рассмотрены особенности сейсмических и ударных волн в насыщенных жидкостью породах, механизм уплотнения (консолидации) земляных масс, механика квазистационарных процессов в нефтегазовом пласте. Проанализированы свойства горных пород и флюидов под давлением, даны уравнения упругого режима фильтрации нефти и газа и расчеты важнейших типов фильтрационных потоков. Уделено внимание учету эффектов трещиноватости, прогиба кровли пластов (нелокально-упругих эффектов), изменений проницаемости пласта, двучленного закона фильтрации и т. д. Предложены рекомендации по расшифровке наблюдений за установившимися и нестационарными режимами работы нефтяных и газовых скважин.

Книга рассчитана на научных и инженерно-технических работников, занимающихся механикой горных пород, нефтегазовых пластов и грунтов, расчетами взрывов в горных породах, сейсмикой и звуковым каротажем, исследованиями нефтяных и газовых скважин, проектированием разработки нефтегазовых месторождений, расчетами в строительном деле и химической технологии и т. д.

Таблиц 42, иллюстраций 57, библиография — 329 названий.

3—8—2
105—70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из актуальных разделов механики сплошных сред является реология многофазных систем. Если одна из фаз образует жесткий каркас среды, а другие фазы представлены жидкостями, то мы имеем дело с важным частным случаем гетерогенных смесей — с насыщенными жидкостью пористыми средами.

Механика *деформируемых насыщенных пористых* сред развивалась в связи с запросами многих различных областей техники и в первую очередь нефтегазодобывающей и горной промышленности, строительства и геофизики.

В самом деле, при расчетах процессов добычи нефти существенную роль играет *теория упругого режима фильтрации*, в которой рассматриваются медленные фильтрационные течения в деформируемых глубинных пластах. К ней тесно примыкает *теория движения газа* по коллекторам газовых месторождений и подземных хранилищ. При исследовании *термического состояния пористых пластов* рассматривают общие закономерности межфазового теплообмена, термодинамических эффектов при движении по пласту жидкости и газа, а также задачи прогрева пласта и его теплоотдачи. Изучение процесса распространения сильных ударных волн в насыщенных жидкостью горных породах важно для применения *взрывной техники* в горном деле и строительстве.

Особое значение исследование сейсмических волн в таких средах имеет для *акустического каротажа* скважин, а также для прямого сейсмического поиска нефтегазовых месторождений.

Нестационарные *движения грунтовых вод* в слабо сцементированных горных породах (грунтах) связаны, как правило, с эффектом подвижности границы массы жидкости. В механике грунтов рассматриваются также процессы медленного *уплотнения* водонасыщенного грунта при оттоке из него жидкости (консолидация грунтовой массы).

Впервые некоторые аспекты механики деформируемых пористых сред изучались в *акустике*; эти работы восходят к Кирхгофу и Релею.

В предлагаемой книге рассматривается в основном один из разделов механики деформируемых пористых сред — теория

нестационарного деформирования таких сред в условиях насыщения их порового пространства жидкостью или газом.

В первой части книги излагается общая теория динамических процессов в насыщенных пористых средах, причем наиболее подробно анализируются реологические (определяющие) законы рассматриваемой многофазной среды. Их характерные особенности выявляются в ходе рассмотрения сейсмических волн в водо- и нефтенасыщенных горных породах. Значительное внимание далее уделено механизму уплотнения грунтов под нагрузкой, т. е. физическим основам теории консолидации земляных масс. Рассмотрена роль фильтрационных перетоков в формировании структуры сильных ударных волн в водонасыщенных грунтах.

Во второй части книги показано, как от общей теории упругого деформирования пористых сред можно перейти к теории упругого режима фильтрации. При этом фундаментальное значение имеют гипотезы о действии горного давления. В книге дается подробный обзор всех доступных данных о фильтрационных свойствах горных пород под давлением. Излагаются основные результаты исследований в области нелинейно-упругого режима фильтрации, учитывающие в более полной форме реальные физические свойства пласта и жидкости (газа). Среди них учет: трещиноватости, нелокальных эффектов передачи горного давления скелету пласта, изменений проницаемости пласта с давлением, двухфазного насыщения и т. д. Проанализирована постановка задач фильтрации, основных для расчетов при исследовании нефтяных и газовых скважин и при проектировании эксплуатации месторождений.

Таким образом, предлагаемая книга является по существу попыткой объединения теоретических представлений, используемых в различных разделах горного дела, в общую механику деформируемых насыщенных пористых сред. Даже попытка такого единого изложения в настоящее время представляется полезной, поскольку это привлечет внимание специалистов различных областей горного дела к методам и возможностям смежных разделов механики.

Следует отметить, что полнота изложения материала заметно зависит от степени его близости к исследованиям, проводившимся авторами книги. Существенно также различие между первой и второй частями книги. Тогда как материал первой части в значительной степени ограничивается анализом постановки задач и интерпретации простейших из них, во второй части общее рассмотрение доводится до инженерных расчетов. Это соответствует в общих чертах уровню выполненных в настоящее время научных исследований.

В книге подробно излагаются результаты, полученные авторами в ходе работ, выполнявшихся в Институте механики АН СССР, а затем в Институте физики Земли им. акад. О. Ю. Шмидта АН СССР, во ВНИИнефти и ВНИИгазе и в Московском институте нефтехимической и газовой промышленности им. акад. И. М. Губкина. В этих работах совместно с авторами участвовали Э. А. Авакян, Е. Ф. Афа-

насьев, А. Бан, Э. А. Бондарев, П. П. Золотарев, В. З. Партон, В. П. Степанов.

Э. А. Авакян и П. П. Золотарев просмотрели в рукописи изложение полученных ими результатов.

Следует подчеркнуть, что работа над рукописью была в основном выполнена в 1965—1966 гг., в последующем были внесены лишь отдельные дополнения.

Авторы весьма признательны Л. А. Галину, А. П. Крылову, а также Ю. П. Борисову, Ю. П. Коротаеву, Б. Б. Лапуку, Г. К. Михайлову, Ф. А. Требину за внимание к проводившимся работам и поддержку. Большое значение имели обсуждения результатов с И. А. Чарным.

Авторы благодарны Л. С. Чернобуровой, вложившей много труда в подготовку рукописи к печати.

Часть I

ДИНАМИКА НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

В. Н. Николаевский

Условные обозначения к I части

$\boldsymbol{a}$ — вектор;
a_0 — коэффициент гидравлического сопротивления среды, пропорциональный проницаемости;
A — скаляр; параметр;
a — коэффициент температуропроводности;
b — коэффициент в двучленном законе фильтрации; коэффициент затухания волны во времени;
b_i — компонента вектора;
B — скаляр; величина, равная $(\lambda_1 + 2\lambda_2)^{-1}$, λ_i — коэффициенты Ламе;
C — средняя концентрация; скаляр;
C' — локальная концентрация;
$c_э$ — коэффициент электроосмоса;
c_v — коэффициент консолидации;
c_j — удельная теплоемкость j-ой фазы;
c — скорость фронта волны переупаковки;
d — характерный (средний) диаметр зерна;
d_0 — расстояние между центрами частиц;
d_i — компонента вектора;
D_0 — коэффициент молекулярной диффузии;
D_{ij} — тензор конвективной (фильтрационной) диффузии;
D_j — коэффициент теплопроводности j-ой фазы;
D — обозначение области; диссипативная функция; диэлектрическая постоянная;
$D = D(a_{ij})$ — дисперсия компоненты a_{ij};
$\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля;
E_* — кинетическая энергия;
E_i — удельная внутренняя энергия i-ой фазы;
e_{ij} — тензор деформации скелета среды;
E_{ij} — характерная величина компоненты e_{ij};
f — символ функции;
$f_i(s)$ — фазовая проницаемость;
F_i — компонента объемной силы межфазового взаимодействия;
F_{ij} — характерная величина компоненты σ^f_{ij};
g_i — компонента силы тяжести;
H — глубина залегания пласта;
h_j — энтальпия j-ой фазы;
h — безразмерный параметр в дисперсионном уравнении;
i — мнимое число; сила тока;
I_0, I_1 — функции Бесселя;
j^k — поток тепла по k-ой фазе;
J_0, J_1 — функции Бесселя;
k — проницаемость;
k_i — орт оси X_i;

$K(1-m_0)$ — модуль всестороннего сжатия скелета среды;

l_i — компонента вектора смещения твердой фазы;

l — длина;

L — характерная длина;

L_i — лагранжев масштаб поля локальных скоростей;

L_i — его безразмерный аналог;

L_{ij} — кинетические коэффициенты (Онзагера);

M — обозначение точки; молекулярный вес;

M_i — коэффициенты в дисперсионном уравнении ($i = 1, 2, 3$);

m — пористость;

N — скачок скорости на зеркале грунтовых вод;

N_B — массовая концентрация B-ой компоненты в смеси;

n — просветность;

n_i — компонента вектора нормали;

p — давление;

P — характерное давление; трансформанта Лапласа для давления;

p_j — давление в j-ой фазе;

p' — локальное давление;

$p_{\mathrm{c}}(s)$ — капиллярное давление;

q — межфазовый переток вещества;

Q_j — теплосодержание j-ой фазы; параметры в дисперсионном уравнении;

R_i — компонента вязкостной силы межфазового взаимодействия; коэффициенты в дисперсионном уравнении;

$R_i(\tau)$ — лагранжев коэффициент корреляции;

Re — число Рейнольдса;

r — коэффициент пропорциональности вязкостной силы сопротивления;

s — насыщенность; параметр преобразования Лапласа;

s_j — удельная энтропия j-ой фазы;

S — поверхность;

ΔS — площадь поверхности;

S_* — внутренняя поверхность;

S_i — поверхность, ограничивающая i-ую фазу;

t — время;

T_i — температура i-ой фазы;

T — характерное время;

u_i — компонента средней скорости i-ой фазы;

U — скорость ударного фронта; характерная скорость;

U_i — компонента средней массовой скорости;

u_i^0 — компонента барицентрической скорости смеси;

V — объем; удельный объем двухфазной смеси; трансформанта Лапласа для напряжения;

ΔV — элементарный объем;

V_j — удельный объем j-ой фазы; компонента средней объемной скорости смеси;

v_i — компонента локальной скорости, удельный объем i-ой фазы;

v_i^* — компонента пульсации локальной скорости;

v_0 — равновесная скорость волны давления;

v_∞ — замороженная скорость волны давления;

v_s — скорость поперечной волны;

V_∞ — скорость ультразвуковых волн;

$W_i = mw_i$ — скорость фильтрации;

W — работа сил межфазового взаимодействия

w_i — средняя («истинная») скорость жидкости;

X — случайная функция, макрокоордината;

x_i — координаты; $i=1,2,3$;

Δx_i — приращение координаты x_i;

$\overline{x_i^2}$ — среднеквадратичное смещение по оси x_i;

Y — вязкодинамический оператор Био;

z — коэффициент Джоуля — Томпсона, координата по вертикали;

α — средний коэффициент объемного расширения среды;

α_j — коэффициент объемного расширения j-ой фазы;

α_f — параметр Френкеля;

β — безразмерный параметр интегрирования; средняя сжимаемость двухфазной среды;

β_j — изотермическая сжимаемость i-ой фазы;

Γ_{ij} — компонента суммарного напряжения в среде;

γ — показатель адиабаты газа;

Δ — разность;

Δ_i — определители;

δ — коэффициент затухания с расстоянием, ширина структуры ударной волны;

δ_{ij} — единичный тензор;

ε — параметр сцементированности горной породы;

ε_{ijk} — аксиальный тензор Леви — Чевита;

ζ — безразмерная частота;

ζ_0 — электрокинетический потенциал;

η — объемная вязкость; волновое число;

θ — угол, первый инвариант тензора напряжений;

θ_0, θ_∞ — эффективные сжимаемости (равновесная и замороженная) термоупругой среды;

$\varkappa$ — коэффициент межфазового теплообмена;

$\varkappa_i$ — параметр в уравнении состояния i-ой фазы;

Λ — длина волны;

λ_c — параметры рассеивания пористой среды;

$(1-m_0)\lambda_j$ — упругие коэффициенты Ламе ($j=1, 2$);

μ — динамическая вязкость жидкости;

ν — кинематическая вязкость жидкости;

$\xi = \eta/(\omega\sqrt{B\rho})$;

π — иррациональное число;

ρ_0 — средняя плотность смеси;

ρ_i — плотность i-ой фазы;

ρ' — локальное значение плотности;

ρ_{12} — присоединенная масса по Био;

σ_{ij} — компонента истинного напряжения в твердой фазе;

σ'_{ij} — компоненты эффективного (фиктивного) напряжения в твердой фазе;

σ^*_{ij} — напряжение по Био;

$\sum$ — скорость локального производства энтропии;

τ — время; время релаксации;

τ_T — время температурной релаксации;

φ — скалярный потенциал, символ функции;

χ — параметр элемента ансамбля;

ψ — функция линии тока;

$\vec{\psi}$ — векторный потенциал смещения;

ω — частота;

Ω — завихренность;

∇^2 — оператор Лапласа;

$[f]$ — символ скачкообразного изменения функции f.

Глава I

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

§ 1. МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Многие среды сложены из отдельных микрочастиц, размеры которых гораздо больше молекулярных расстояний. Каждую из этих микрочастиц можно рассматривать как сплошную, т. е. характеризовать ее плотностью, давлением и т. д. и задавать на ее границах условия взаимодействия с соседними частицами. Однако при исследовании движений, масштабы которых несопоставимо больше характерного размера d микрочастиц и характерного расстояния между центрами микрочастиц d_0, в качестве элементарного макрообъема среды ΔV (т. е. макроточки среды) выбирают объем, включающий в себя множество микрочастиц. Выбранный таким образом элементарный макрообъем считают заполненным сплошным материалом среды и его движение описывается уравнениями неразрывности, массы, импульса и энергии.

Насыщенная жидкостью или газом пористая среда, с точки зрения механики сплошной среды, — это по существу двухфазная сплошная среда, одной из фаз которой являются частицы жидкости, а другой — твердые частицы скелета среды. Учет этого обстоятельства позволяет изучить особенности движения среды, вносимые резким различием механических свойств составляющих эту среду частиц. Разбиение всех перемешанных между собой частиц на два класса, соответствующих каждой из фаз, использует тот факт, что различие между частицами одного класса гораздо менее существенно, нежели отличие каждой из них от частицы, принадлежащей к другой фазе. При этом фактически предполагается, что все пространство элементарного макрообъема заполнено двумя сплошными средами, взаимопроникающими и взаимодействующими друг с другом.

Элементарный макрообъем $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, т. е. рассматриваемая макроточка среды x_1, x_2, x_3, характеризуется некоторыми средними (по находящимся в нем частицам) значениями переме-

щения, напряжения и т. д. В естественных пористых средах микрочастицы существенно различаются по своим свойствам, размерам, форме и образуют хаотически уложенный конгломерат. Поэтому будем считать, что величины смещений микрочастиц, микронапряжений и т. д. случайным образом меняются внутри ΔV, образуют случайные тензорные поля. Этому предположению соответствует способ статистического осреднения (по множеству реализаций рассматриваемых полей).

Рассмотрим, например, случайную функцию $X/(M, \chi)$, равную нулю, если произвольная микроточка M (x_1, x_2, x_3) объема $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ принадлежит твердой микрочастице, и единице, если точка M попадает в поровое пространство.

Второй аргумент функции X отражает ее случайный характер и является параметром множества реализаций. Действительно, принадлежность микроточки M той или другой области пространства ΔV априори неизвестна — если точка M с координатами x_1, x_2, x_3 в объеме $\Delta V_{\chi=1}$ попала в поровое пространство, то в силу хаотичности, неопределенности строения конгломерата микрочастиц это еще не означает принадлежности той же области точки с теми же координатами, но в другом таком же объеме $\Delta V_{\chi=2}$. Другими словами, функция X зависит не только от координат точки M, но и от выбора объема ΔV из множества реализаций χ подобных объемов ΔV_χ.

Статистическое (среднее) значение $\tilde{X}$ функции $X(M, \chi)$ определяется следующим образом:

$$\tilde{X}(M) = \int_\chi X(M, \chi)\, d\chi, \quad \int_\chi d\chi = 1. \tag{1.1}$$

Если всюду $\tilde{X}(M) = \tilde{X}$ независимо от выбора точки M, то функция $\tilde{X}(M, \chi)$ называется *стационарной* случайной функцией.

Заметим, что, вообще говоря, могут встретиться образования, у которых случайная функция $X(M, \chi)$ не будет стационарна. Например, пусть в каком-нибудь сосуде помещено небольшое число шариков. Будем встряхивать сосуд. После каждого встряхивания шарики будут укладываться по-новому, будет получаться новая реализация упаковки. Если провести осреднение (1.1), то результат будет существенно зависеть от выбора координат x_i — у стенок и в центре сосуда величины $\tilde{X}$ будут различны.

Для построения механики сплошной среды, как будет видно ниже, естественно пространственное осреднение:
по объему

$$\overline{X}_V(\chi) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} X(M, \chi)\, dM, \tag{1.2}$$

по плоскости

$$\overline{X}_S(\chi) = \frac{1}{\Delta S} \int_{\Delta S} X(M, \chi)\, dM \tag{1.3}$$

и даже вдоль линии

$$\overline{X}_L(\chi) = \frac{1}{\Delta L} \int_{\Delta L} X(M, \chi)\, dM. \tag{1.4}$$

Если результат осреднения (1.2) независим от выбора ΔV_χ из множества χ, то множество χ состоит из *однородных* макрообъемов. Легко видеть, что если объем ΔV не настолько велик, чтобы включить в себя все возможные типы микрочастиц и вариации их укладки, то результат осреднения (1.2) зависит от параметра χ.

Поскольку при использовании методов математической статистики требуется осреднение (1.1), а в механике сплошных сред осреднение (1.2), то необходимо выполнение *эргодической* гипотезы, т. е. равенства [1]

$$\overline{X}(M) = \overline{X}_V(\chi) \tag{1.5}$$

независимо от выбора m и χ.

Таким образом, элементарный макрообъем ΔV должен быть достаточно велик по сравнению с макромасштабом среды и достаточно мал по сравнению с внешним масштабом среды — в этом случае применимы методы механики сплошной среды.

Способ осреднения, вообще говоря, диктуется физической постановкой задачи. Для одних величин характерно осреднение по объему, для других (тензорных) — по плоскости. Рассмотрим несколько примеров. Пусть поровое пространство среды заполнено жидкостью с постоянной плотностью ρ_2^0. Тогда средняя плотность среды ρ_0 будет определяться выражением

$$\rho_0 = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} (1 - X(M, \chi))\, \rho_1^0\, dM + \\ + \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} X(M, \chi)\, \rho_2^0\, dM = (1 - m)\, \rho_1^0 + m\rho_2^0, \tag{1.6}$$

где ρ_1^0 — плотность твердых частиц; $m = \overline{X}_V$ — пористость среды.

Заметим, что если плотности, например, твердых микрочастиц неодинаковы, то ρ_1^0 в правой части выражения (1.6) имеет смысл средней по этим частицам величины.

На произвольном плоском сечении объема ΔV действуют суммарные (полные) напряжения Γ_{ij}. Они уравновешиваются средним (по плоскости, перпендикулярной оси j) напряжением σ_{ij} в твердой фазе и средним (снова по плоскости) давлением p в жидкости

$$\Gamma_{ij} = (1 - n)\, \sigma_{ij} - np\delta_{ij}, \tag{1.7}$$

здесь δ_{ij} — единичный тензор; n — просветность рассматриваемого плоского сечения.

---

[1] Аналогичное условие можно сформулировать и при использовании других типов осреднения, например типа (1.3) или (1.4).

При нахождении просветности n (относительной площади сечения, принадлежащей твердым частицам) проводится независимое осреднение по тому же сечению ΔS достаточно большой площади. Будем считать, что результат осреднения не зависит от выбора реализации сечения, т. е. множество сечений S_χ однородно при определении[1] просветности: $n = \overline{X}_S$.

Можно представить, что область D среды разбита на множество элементарных объемов ΔV. Если окажется, что это множество является множеством однородных реализаций ΔV_χ, то область D *однородна*. Можно проводить в области D множество плоских сечений ΔS. Если таким образом составляется множество однородных реализаций ΔS_χ, то это можно также принять за определение *однородности* области D.

Отсюда видно, что определение однородности среды связано с соответствующим способом осреднения.

Рассмотрим условия эквивалентности способов осреднения (1.2) и (1.3). Можно показать, что $\overline{X}_V = \overline{X}_S$, если среда однородна в смысле S-осреднения. Действительно,

$$\overline{X}_V = m = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} X(M, \chi)\, dM = \lim_{b_1 \to \infty} \frac{1}{2b_1}\int\limits_{-b_1}^{+b_1} n(x_1)\, dx_1 = n \quad (1.8)$$

при $n(x_1) \equiv n$; n — просветность среды. Здесь $2b_1$ — длина объема ΔV вдоль координаты x_1.

Отсюда, если выполнено условие однородности при S-осреднении, то в любом сечении среды выполняется фундаментальное равенство

$$\Gamma_{ij} = (1 - m)\,\sigma_{ij} - mp\delta_{ij}, \quad (1.9)$$

а значение пористости m можно определять как просветность произвольного шлифа (плоского сечения) пористой среды.

Если же среда однородна только в смысле V-осреднения, то из выражения (1.6) следует [181], что *средняя просветность равна пористости*: $\overline{n}_V = m$. Примером таких сред являются регулярные упаковки шаров [131], у которых величина пористости определяется формулой

$$m = 1 - \frac{\pi}{6\,(1 - \cos\theta)\sqrt{1 + 2\cos\theta}}, \quad (1.10)$$

где θ — параметр укладки шаров (угол ромба, составленного линиями, соединяющими центры шаров; $60° \leqslant \theta \leqslant 90°$). В то же время минимальное значение просветности (в плоскости, содержащей центры шаров) определяется как

$$n_{\min} = 1 - \frac{\pi}{4\sin\theta}. \quad (1.11)$$

[1] При нахождении средних фазовых напряжений результат осреднения будет зависеть от ориентации плоскости осреднения, что, вообще говоря, приводит к появлению асимметричных тензоров напряжений. Ниже, однако, все построения выполняются в рамках симметричной механики: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и т. п.

и, например, значению $\theta = 90°$ соответствует наибольшее значение $m = 0{,}4764$, тогда как $n_{\min} = 0{,}2146$. Таким образом, в регулярных средах нужно вводить по крайней мере еще одну геометрическую характеристику помимо пористости, например, величину (1.11), или же так называемую площадь контактов между микрочастицами и т. д.

Здесь рассматриваются хаотически организованные пористые среды, для которых при нахождении осредненных характеристик внутренней структуры принимается допущение об однородности при S-осреднении. Предполагается также, что в рассматриваемых средах масштаб области однородности D гораздо больше масштаба осреднения. Это предположение, собственно, было уже сформулировано как условие выбора элементарного макрообъема ΔV.

Итак, каждый элементарный макрообъем ΔV (т. е. каждая макроточка среды) характеризуется относительным объемным содержанием фаз, например твердой $(1 - m)$ и жидкой m.

Исследованию собственно хаотической микроструктуры пористой среды, закономерностей реализуемого в природе перемешивания твердых и жидких частиц посвящено большое число работ, обзор части которых можно, например, найти в монографии [8]. Здесь отметим только работу П. Дебая и др. [274] по рассеиванию рентгеновских лучей в пористых средах.

Что касается выбора способа осреднения, позволяющего вводить средние значения параметров фаз — плотности, напряжений, скоростей и т. д., — то он естественным образом определяется при переходе от уравнений, описывающих микродвижение (микросостояние) твердых и жидких частиц, к эффективным макроуравнениям совместного движения обеих фаз.

§ 2. КИНЕМАТИКА ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим закономерности перемещений жидких частиц, участвующих в общем потоке однородной жидкости в пористой среде. Представим, что имеется возможность фиксировать смещения отдельных меченых частиц. Перемешивание меченых частиц с остальной жидкостью внутри поры описывается обычным уравнением диффузии в движущейся жидкости, выписываемым для микрообъема жидкости:

$$\frac{\partial C'}{\partial t} = D_0 \nabla^2 C' - v_i \frac{\partial C'}{\partial x_i}, \qquad (2.1)$$

где x_i — микрокоординаты течения; C' — концентрация меченых частиц; D_0 — коэффициент молекулярной диффузии; v_i — фактическая скорость движения жидкости в микроточке порового пространства. Будем называть величину v_i — локальной скоростью жидкой частицы.

Осредним уравнение (2.1) по множеству микропотоков жидкости, находящихся в элементарном макрообъеме пористой среды $\Delta V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$ и фактически занимающих объем ΔV_2:

$$\frac{1}{\Delta V_2} \int\limits_{\Delta V_2} \frac{\partial C'}{\partial t}\, dV = \frac{D_0}{\Delta V_2} \int\limits_{\Delta V_2} (\nabla^2 D')\, dV - \frac{1}{\Delta V_2} \int\limits_{\Delta V_2} v_i \frac{\partial C'}{\partial x_i}\, dV, \qquad (2.2)$$

здесь X_i — макрокоординаты, используемые для составления осредненных уравнений ($\Delta X_i \gg \Delta x_j$), $dV = dx_1 dx_2 dx_3$.

Предположим, что все твердые частицы двигаются с одной скоростью (в частности, скелет пористой среды может быть неподвижен), скорость v_i измеряется относительно скорости смещения скелета в целом, а макрообъем ΔV жестко связан со скелетом среды. Тогда все границы области интегрирования ΔV_2 фиксированы во времени и это сразу позволяет записать уравнение (2.2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta V_2} C'\,dV = D_0 \int\limits_{\Delta S_2} \frac{\partial C'}{\partial x_i} n_i\,dS + D_0 \int\limits_{S_*} \frac{\partial C'}{\partial x_i} n_i\,dS - \\ - \int\limits_{\Delta S_2} C' v_i n_i\,dS - \int\limits_{\Delta V_2} C' \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,dV, \qquad (2.3)$$

где ΔS_2 — занятая жидкими частицами часть общей площади поверхностей, ограничивающих объем ΔV; S_* — площадь внутренней поверхности в объеме ΔV, разделяющей твердые и жидкие частицы. Здесь использовано также условие обращения в нуль скорости v_i на поверхности S_*.

Если ограничиться потоком несжимаемой жидкости ($\partial v_i/\partial x_i = 0$), то последний интеграл справа тождественно равен нулю. В пренебрежении адсорбцией меченых частиц на поверхностях раздела S_* в нуль обращается также второй интеграл справа — нет притока меченых частиц к поверхности S_*. Можно ввести среднюю концентрацию C меченых частиц в поровом пространстве ΔV_2

$$C = \frac{1}{\Delta V_2}\int\limits_{\Delta V_2} C'\,dV. \qquad (2.4)$$

Тогда уравнение (2.3) можно понимать, как баланс меченых частиц в макрообъеме среды, и представить в виде следующего макроуравнения (в системе макрокоординат X_i):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} D_0 \operatorname{grad} C - \vec{w} \operatorname{grad} C - \operatorname{div} \vec{Q}, \qquad (2.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial X_1} + \frac{\partial a_2}{\partial X_2} + \frac{\partial a_3}{\partial X_3}, \quad \operatorname{grad} f = \sum_i \vec{k}_i \frac{\partial f}{\partial X_i},$$

где $\vec{k}_i$ — единичный орт координатной оси X_i; $\vec{w}$ — (по предположению, постоянная по объему) средняя скорость движения жидких частиц, определенная по площади ΔS_2^0, занимаемой жидкостью, на одной из граней объема ΔV:

$$\vec{w} = \frac{1}{\Delta S_2^0}\int\limits_{\Delta S_2^0} \vec{v}\,dS; \qquad (2.6)$$

символом $\vec{Q}$ обозначена величина дополнительного (пульсационного) потока меченых частиц

$$\vec{Q} = \int\limits_{S_2^0} \vec{v}^* C' \, ds, \tag{2.7}$$

и использовано условие равенства среднего молекулярного переноса (градиента от концентрации C') молекулярному переносу средней концентрации (градиенту средней концентрации C). Видно, что дополнительный поток меченых частиц $\vec{Q}$ обусловлен наличием пульсаций v_i^* скорости жидких частиц, т. е. отклонениями локальной скорости v_i от ее среднего значения

$$v_i^* = v_i - w_i \tag{2.8}$$

и изменением средней концентрации C.

Для изучения связи потока $\vec{Q}$ с параметрами течения w_i, D_0 и пористой среды перейдем к анализу перемещения отдельной меченой частицы в потоке однородной жидкости в поровом пространстве для простоты изотропной среды. Изотропия понимается как независимость всех параметров случайных полей, характеризующих микростроение среды, относительно жестких вращений и зеркальных отображений выбранной системы координат.

В силу хаотичности микростроения можно считать, что фактические (локальные) скорости жидких частиц v_i образуют случайное векторное поле в трехмерном пространстве. Относительно этого поля будем предполагать, что оно непрерывно во всех точках. Поскольку рассматривается недеформируемая пористая среда, то в точках, принадлежащих твердым микрочастицам, следует полагать локальные скорости равными нулю. Поле локальных скоростей не зависит от времени, если, конечно, не меняются осредненные параметры этого поля, доступные наблюдению и контролю, например средняя скорость. Обычно средняя скорость изменяется настолько медленно, что при этом поле локальных скоростей фактически проходит через ряд стационарных состояний.

Введенная выше средняя скорость, характеризующая поток жидкости определяется путем осреднения по плоскому сечению среды w_i, что эквивалентно [1], как предполагалось в § 1, осреднению по объему

$$w_i = \frac{1}{\Delta V_2} \int\limits_{\Delta V_2} \int\limits \int v_i \, dV = \frac{1}{\Delta S_2^0} \int\limits_{\Delta S_2^0} \int\limits v_i \, dS, \tag{2.9}$$

где ΔV_2, ΔS_2^0 — соответственно части объема (ΔV) или площади (S^0), занятые только жидкими частицами. Эта средняя величина называется в феноменологической теории «истинной» скоростью потока. В то же время скорость фильтрации W_i связана со значением w_i соотношением Дюпюи — Форхгеймера

$$W_i = \frac{1}{\Delta V_i} \int\limits_{\Delta V} \int\limits \int v_i \, dV = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V_2} \int\limits \int v_i \, dV = \frac{\Delta V_2}{\Delta V} w_i = m w_i. \tag{2.10}$$

[1] См. также ссылку на стр. 13.

Рассмотрим движение в случайном поле локальных скоростей какой-нибудь маркированной жидкой частицы, не отличающейся по своим механическим характеристикам от остальных жидких частиц.

Если в начальный момент частица находилась в точке $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, системы координат, движущейся со средней скоростью, то через время t ее координаты будут

$$x_i(t) = \int_0^t (v_i(\tau) - w_i)\, d\tau = \int_0^t v_i^*(\tau)\, d\tau, \qquad (2.11)$$

где v_i^* — скорость пульсации.

Таким образом, относительное смещение меченой частицы определяется как среднее значение от случайной функции $v_i^*(\tau)$ фактически вдоль некоторой кривой, проходящей сквозь поровое пространство, а именно вдоль линии тока жидкой частицы.

Скорость пульсации является случайной функцией времени τ движения частицы, как и в турбулентном потоке жидкости, хотя природа случайных пульсаций скоростей различна. В турбулентном потоке случайность вызвана неустойчивостью течений при больших числах Рейнольдса, скорость в каждой его точке случайно меняется во времени, тогда как в пористых средах пульсации реализуются в пространстве и вызываются «устойчивой» случайностью микроструктуры среды [1].

Для исследования случайности микростроения пористой среды введем случайное непрерывное поле *локального тензора* пористой среды a_{ij}, определяемого следующим образом: в каждой микроточке среды средняя скорость w_i случайным образом преобразуется в локальную v_i по правилу

$$v_i = a_{ij} w_j. \qquad (2.12)$$

В силу самого определения (2.12) среднее его значение $\overline{a_{ij}} = \delta_{ij}$ — единичному тензору. Подчеркнем, что поле в областях предельной автомодельности по числу Рейнольдса (т. е. в области ползущих движений, где несущественна инерция жидкости и справедлив закон Дарси, а также в области полной турбулизации микроструек жидкости — см. подробнее ниже) не зависит от величины средней скорости потока и определяется только внутренней геометрией пористой среды. Однако компоненты локального тензора пористой среды могут зависеть от направляющих косинусов средней скорости, поскольку это безразмерные величины. Примем упрощающую гипотезу: *случайное поле локального тензора пористой среды не зависит от направления средней скорости* [8, 160].

Если для поля тензора a_{ij} характерны такие свойства, то при обращении направления средней скорости локальные скорости во всех точках порового пространства также изменят знаки на противоположные. Это означает, что меченая частица, вышедшая в момент $t = 0$ из точки $x_i = 0$ и попавшая в момент t

[1] Для характеристики подобной ситуации используется также специальный термин: «псевдотурбулентность» (см. Ю. А. Буевич и др. J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, p. 2, 371—381).

обращения скорости в точку с координатами $x_i(t)$ согласно уравнению (2.11), за время $2t$ должна была бы вернуться в исходную точку $x_i = 0$. Таким образом, введение поля a_{ij} в принципе позволяет учесть отмеченную Дж. Тейлором (об этом сообщила госпожа Рут Аронов (США) во время Международного конгресса по химии в Москве в июле 1965 г.) характерную особенность перемешивания жидкости при очень медленном движении в пористых средах в отсутствии молекулярной диффузии при очень медленном движении — краска, занимающая некоторый объем пор и расползшаяся в фильтрационном потоке, при его обращении должна собраться снова в исходной области.

Ранее Дж. Тейлор (см., например, [8, 161]) замечал, что в плоском потоке чисто фильтрационное перемешивание должно ограничиваться полосой между двумя линиями тока, проходящими через крайние точки области, первоначально занятой мечеными частицами. Подчеркнем, однако, что это справедливо лишь при абсолютном отсутствии молекулярной диффузии, так как даже весьма слабое участие последней приводит к тому, что меченая частица перескакивает с одной линии тока на другую и ее движение уже не будет контролироваться строго детерминированным во времени полем локального тензора пористой среды.

Величина смещения $x_i(t)$ в силу случайности скорости пульсации v_i^* сама является случайной величиной и для достаточно больших интервалов времени можно принять гипотезу о нормальном законе распределения трехмерной случайной функции $x_i(t)$, т. е. вероятности попадания жидкой частицы в момент времени t в точку с координатами x_1, x_2, x_3. Тогда плотность распределения этой вероятности в системе координат, оси которых являются главными осями соответствующей дисперсионной матрицы, имеет вид

$$C(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{(2\pi)^{-3/2}}{\sqrt{\overline{x_1^2}\,\overline{x_2^2}\,\overline{x_3^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{\overline{x_i^2}}\right), \tag{2.13}$$

где $\overline{x_i^2}$ — среднеквадратичное перемещение.

Выражение (2.13) есть решение типа мгновенного источника уравнения диффузии, записанное в главной системе координат

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ii}\frac{\partial C}{\partial x_i}\right), \tag{2.14}$$

если рассматривать C как относительную концентрацию меченых частиц. Здесь D_{ii} — составляющие по осям коэффициента *конвективной* диффузии

$$D_{ii} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\overline{x_i^2}). \tag{2.15}$$

А так как уравнение применимо при достаточно больших длинах пробега меченой частицы, то фактически в (2.14) фигурируют уже макрокоординаты X_i такие, что $dX_i \gg dx_j$.

Распределение (2.13), а следовательно, и уравнение (2.14) характеризуют попадание частицы в макроточку с координатами X_1, X_2, X_3 — нормальный закон распределения справедлив при случайных блужданиях частиц после бесконечно большого числа шагов. Аналогия движения частицы жидкости в поровом пространстве с броуновским случайным блужданием частиц была впервые

замечена и использована для обоснования диффузионного характера процесса Шейдеггером [236] (см. также [8]), где проведен подробный обзор имеющихся по этой проблеме работ [1]. Название «конвективная диффузия», предложенное в работе [160], объясняется тем, что порождающие диффузию случайные блуждания существуют только при наличии конвективного переноса, т. е. при отличной от нуля средней скорости фильтрационного потока. Так как в распределении (2.13) фигурируют макрокоординаты, это позволяет принять, что в начальной точке $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ находилось множество меченых частиц, и отождествить плотность вероятности попадания меченой частицы в какую-либо точку с концентрацией частиц, попавших в нее в тот же момент времени.

Случайное поле локальных скоростей в пористой среде будет осесимметрично изотропно, оно будет иметь ось симметрии — направление средней скорости. В самом деле, область течения (изотропная пористая среда) существенно неподвижна, а направление средней скорости, задаваемое ортом w_k^0, является единственным характерным направлением, неравноправным с другими направлениями.

Рассмотрим скалярную величину $D_{ij}d_ib_j$, где d_i, b_j — компоненты произвольных единичных векторов. Эта скалярная величина в силу инвариантности относительно жестких вращений и зеркальных отображений конфигурации векторных аргументов d_i, b_j, w_k^0 зависит лишь от углов между ними, так как модули рассматриваемых векторов d_i, b_j, w_k^0 равны единице. Поэтому

$$D_{ij}d_ib_j = \varphi(d_ib_i,\ d_iw_i^0,\ b_iw_i^0). \tag{2.16}$$

Но так как левая часть уравнения (2.16) линейна относительно произведения b_id_j, то должно выполняться равенство

$$D_{ij}d_ib_i = Bd_ib_i + Ad_iw_i^0b_jw_j^0. \tag{2.17}$$

Отсюда коэффициент диффузии как осесимметрично изотропный тензор имеет вид

$$D_{ij} = Aw_i^0w_j^0 + B\delta_{ij}, \tag{2.18}$$

где A, B — скаляры, возможные функции четных степеней вектора $\vec{w}$.

Если сама среда анизотропна, например, имеет одно характерное направление r_i (в естественных осадочных горных породах вектор $\vec{r}$ перпендикулярен плоскости их напластования), то для коэффициента D_{ij} аналогично следует выражение

$$D_{ij} = Aw_i^0w_j^0 + B\delta_{ij} + Cr_ir_j + Ew_i^0r_j + Fw_j^0r_i. \tag{2.19}$$

Рассмотрим теперь течения, в которых, например, можно в локальном масштабе пренебречь инерционными силами. Учтем также, что конвективная диффузия динамически нейтральной примеси независима, по предположению, от величины коэффициента молекулярной диффузии D_0. Поэтому характерными параметрами процесса будут средняя скорость w, вязкость жидкости μ и геометри-

[1] См. также работу [187], в значительной степени предвосхитившую более поздние исследования Шейдеггера.

ческие характеристики внутренней сктруктуры среды — безразмерные или же имеющие размерность длины. Соответственно коэффициент конвективной диффузии, имеющий размерность $см^2/сек$, не будет меняться при изменениях плотности жидкости ρ или D_0 и будет равен произведению средней скорости и какой-то, пока не известной нам, величины, характеризующей внутреннюю геометрию среды и имеющей размерность длины. Эта величина будет постоянна при изменениях средней скорости в области безынерционных движений, так как зависимость ее от скорости может быть выражена лишь в виде зависимости от осредненного числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho w d/\mu$, которая невозможна — иначе величина плотности жидкости будет влиять на процесс перемешивания (здесь d — характерная длина, например средний диаметр зерна).

Таким образом, коэффициенты A, B в данном диапазоне течений пропорциональны модулю средней скорости и фундаментальное соотношение (2.18) принимает вид

$$D_{ij} = (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{w_i w_j}{|\vec{w}|} + \lambda_2 |\vec{w}| \delta_{ij}, \qquad (2.20)$$

где λ_1, λ_2 — соответственно продольный и поперечный параметры рассеивания среды, постоянные размерности длины (см. [160], а также [252]).

Весь диапазон изменений средней скорости (при смещении твердой фазы — относительной скорости) можно разбить на следующие пять характерных интервалов.

I. При крайне малой скорости ($wd \ll D_0$) перемешивание чисто молекулярное, конвективная диффузия незначительна.

II. При несколько большей скорости ($wd \sim D_0$) молекулярное и механическое перемешивания взаимосвязаны.

III. Скорости более значительны ($wd > D_0$), но течение еще локально безынерционно; $\lambda_i = \mathrm{const}$.

IV. Скорость еще больше, $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$, инерционные силы в локальном масштабе взаимодействуют с вязкостными, $\lambda_i = \lambda_i(\mathrm{Re})$.

V. Скорость весьма значительна, вязкостные силы малы по сравнению с инерционными, снова $\lambda_i = \mathrm{const}$.

Большое число экспериментальных работ (см., например, обзоры [8, 100] показывают, что действительно в областях предельной автомодельности существует линейная зависимость коэффициента диффузии от средней скорости потока. Характерны следующие цифры: $\lambda_1 = 0{,}127$ *см* $= 14{,}3\ \lambda_2$, полученные в работе [28] в опытах по фильтрации воды (интервал III) в речном песке.

Если представлять среду в виде набора параллельных капиллярных трубок, то коэффициент диффузии был бы пропорционален квадрату средней скорости (см. по этому поводу [8]). Таким образом, хаотическое расположение поровых каналов и случайность их размеров преобладают в определении макрозаконов движения над свойствами реализуемого в каждом канале пуазейлевского течения; движение в пористых средах нельзя свести к движению в отдельной трубке или щели.

Уравнение (2.14) в неподвижной системе координат в областях предельной автомодельности III и V по числу Рейнольдса имеет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X_i}\left\{\left(A\delta_{ij}\delta_{kl}\frac{w_k w_l}{|\vec{w}|} + B\,|\vec{w}|\,\delta_{ij}\right)\frac{\partial C}{\partial X_j}\right\} - w_i\frac{\partial C}{\partial X_i} \qquad (2.21)$$

и для плоских течений может быть записано [162] в координатах φ, ψ, где φ — потенциал ($w = -\mathrm{grad}\,\varphi$); ψ — функция линии тока (макродвижения):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = w^2\left\{\lambda_1\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(w\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right) + \lambda_2\frac{\partial}{\partial\psi}\left(w\frac{\partial C}{\partial\psi}\right) - \frac{\partial C}{\partial\psi}\right\}. \qquad (2.22)$$

Попытаемся теперь связать параметры рассеивания λ_1, λ_2 с осредненными характеристиками поля локального тензора a_{ij} пористой среды. Для этого снова вернемся к рассмотрению среднеквадратичного перемещения $\overline{x_i^2}$. Эта величина может быть представлена в виде

$$\overline{x_i^2} = \overline{\left(\int_0^t v_i^*(\tau)\,d\tau\right)^2} = \int_0^t\int_0^t \overline{v_i^*(\tau_1)\,v_i^*(\tau_2)}\,d\tau_1\,d\tau_2. \qquad (2.23)$$

Для больших времен выражение (2.23) можно преобразовать к следующему виду:

$$\overline{x_i^2} = \overline{2(v_i^*)^2}\int_0^t (t-\tau)\,R_i(\tau)\,d\tau \approx \overline{2(v_i^*)^2}\,t\int_0^t R_i(\tau)\,d\tau, \qquad (2.24)$$

где $R_i(\tau) = \overline{v_i^*(0)\,v_i^*(\tau)}/\overline{(v_i^*)^2}$ — лагранжев коэффициент корреляции компоненты $v_i^* = v_i - w_i$.

Соотношение (2.24) справедливо при $|\vec{w}|\,t \gg d$, где d — выбранная каким-либо способом характерная длина микроструктуры, например средний диаметр зерна. Величина d одного порядка с величиной $L_i\,|\vec{w}| = |\vec{w}|\int_0^\infty R_i(\tau)\,d\tau$. Здесь L_i можно назвать, пользуясь терминологией статистической теории турбулентности, лагранжевым масштабом поля локальных скоростей.

Однако для перехода к полю локального тензора удобнее пользоваться безразмерным аналогом величины L_i. Поэтому введем в соотношение (2.24) безразмерную переменную $\beta = |\vec{w}|\,\tau/d$. Тогда

$$\overline{x_i^2} = \overline{2t(v_i^*)^2}\,\frac{d}{|w|}\int_0^{|w|\,t/l} R_i(\beta)\,d\beta \approx 2t\,\overline{(v_i^*)^2}\,\frac{d}{|w|}\int_0^\infty R_i(\beta)\,d\beta, \qquad (2.25)$$

поскольку в выражении (2.13) фактически фигурируют макрокоординаты, т. е. $|\vec{w}|\,t \gg d$. Будем называть величину $\mathrm{L}_i = \int_0^\infty R_i(\beta)\,d\beta$ безразмерным лагранжевым масштабом пористой среды. Легко видеть, что $\mathrm{L}_i = L_i\,|w|/d$. Весьма существенно, что L_i не зависит от времени, так как это позволяет сразу сказать, что L_i не зависит уже и от средней скорости потока, а определяется лишь микроструктурой среды, т. е. L_i — осредненная характеристика поля локального тензора. Но поле локального тензора изотропно, а потому $\mathrm{L}_i = \mathrm{L}$ — скаляр.

Заметим, что мы произвольно выбрали за масштаб отсчета d средний диаметр зерна, можно было бы положить, например, $d = \sqrt{k/m}$. Способ выбора масштаба отсчета d приведет к соответственному изменению величины L, которая

представляет собой отношение «длины перемешивания» среды $L \mid w \mid$ к диаметру зерна d (или к параметру $\sqrt{k/m}$).

Связь между дисперсией $(v_i^*)^2$ компонент локальных скоростей и осредненными величинами компонент тензора a_{ij} выражается следующим образом:

$$\overline{(v_i^*)^2} = \overline{(v_i - w_i)^2} = (\overline{a_{\alpha i} a_{\alpha j}} - \overline{a_{\alpha i}}\,\overline{a_{\alpha j}})\, w_i w_j = (\overline{a_{\alpha i} a_{\alpha j}} - \delta_{\alpha i}\delta_{\alpha j})\, w_i w_j. \qquad (2.26)$$

В силу изотропии пористой среды и равноправия индексов i, j все осредненные произведения $\overline{a_{\alpha i} a_{\alpha j}}$, которые являются одноточечными моментами изотропного случайного поля a_{ij}, должны быть инвариантны относительно выбора системы координат, и поэтому имеют следующий вид:

$$\overline{a_{\alpha i} a_{\alpha j}} = A_1 \delta_{\alpha i}\delta_{\alpha j} + A_2 \delta_{\alpha\alpha}\delta_{ij}, \qquad (2.27)$$

где A_1, A_2 — скаляры.

Отсюда все осредненные произведения $\overline{a_{\alpha i} a_{\alpha j}}$, у которых $i \neq j$, должны быть равны нулю. Благодаря этому выражение (2.26) упростится: множитель в скобках будет дисперсией $D\,(a_{\alpha i})$ компоненты $a_{\alpha i}$:

$$\overline{(v_\alpha^*)^2} = (\overline{a_{\alpha i} a_{\alpha i}} - \delta_{\alpha i}\delta_{\alpha j})\; w_i w_i = D\,(a_{\alpha i})\, w_i^2. \qquad (2.28)$$

В связи с этим выражение (2.23) принимает вид

$$\overline{x_\alpha^2} = 2D\,(a_{\alpha i})\, w_i^2\, \frac{td}{|w|}\, L, \qquad (2.29)$$

и согласно определению коэффициента диффузии (2.15) между параметрами рассеивания и дисперсией поля локального тензора реализуется связь

$$\lambda_1 = D\,(a_{11})\, L d, \quad \lambda_2 = D\,(a_{12})\, L d.$$

Проведенный здесь анализ предполагает наличие молекулярной диффузии — как и в случае турбулентной диффузии окончательное растворение происходит на молекулярном уровне.

§ 3. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ МАССЫ И ИМПУЛЬСА

Начнем анализ с вывода осредненного уравнения движения жидкости в сплошной двухфазной среде. В каждой микроточке заполненного жидкостью порового пространства справедливы исходные уравнения гидродинамики обычной вязкой жидкости

$$\rho_2' \frac{dv_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij}' = \rho_2' g_i, \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_2' v_i = 0, \qquad (3.2)$$

где g_i — компонента ускорения силы тяжести, штрихами обозначены локальные значения плотности жидкости ρ_2' и компонент тензора напряжений p_{ij}'.

Осредним уравнения (3.1) и (3.2) по объему той части $\Delta V_2(t)$, которая занята жидкой фазой.

При последующих преобразованиях будет использована известная теорема Остроградского—Гаусса.

$$\int\limits_V \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \int\limits_S v_i n_i\, dS, \tag{3.3}$$

где S — поверхность, содержащая в себе произвольный объем V; n_1 — компоненты нормали к поверхности S.

Кроме того, заметим, что для произвольной величины f, связанной с частицей жидкости, оказывается справедливым следующее соотношение:

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' \frac{df}{dt}\, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' f\, dV + \int\limits_{\Delta S_2(t)} \rho_2' f v_i n_i\, dS, \tag{3.4}$$

где ΔS_2 — неподвижная часть площади поверхности S_2, включающей в себя поровой объем $\Delta V_2(t)$ в фиксированный момент (ее мгновенное состояние см. [143]), за вычетом S_*. Часть S_* всей поверхности перемещается со скоростью самих частиц (т. е. S_* переносится вместе с потоком). В нашем случае ΔS_2 — занятая жидкими частицами часть поверхности граней элементарного макрообъема V, связанного с лабораторной системой координат, через стенки которого перемещаются твердые и жидкие частицы.

В самом деле, подынтегральное выражение левой части соотношения (3.4) можно преобразовать следующим образом:

$$\rho_2' \frac{df}{dt} = \rho_2' \frac{\partial f}{\partial t} + \rho_2' v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \rho_2 \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_2' f v_i) -$$

$$- f \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_2' v_i) = \frac{\partial \rho_2 f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_2' f v_i, \tag{3.5}$$

причем при последнем переходе было использовано справедливое для микропотока жидкости уравнение неразрывности (3.2).

Далее имеем

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \frac{\partial \rho_2' f}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' f\, dV - \int\limits_{\Delta S_2(t)} \rho_2' f u_i' n_i\, dS,$$

где $u_i' n_i$ — нормальная компонента скорости перемещения граничной поверхности S_2 (t), т. е. подынтегральное выражение во втором слагаемом обращается в нуль на неподвижных частях S_2 граничной поверхности (отделяющих рассматриваемый объем ΔV), а сам интеграл сводится к интегралу по внутренним поверхностям S_* объема — граничным с другой (твердой) фазой. Существенно, что граничная поверхность S_* перемещается со скоростью, равной скорости смещения контактирующих с ней жидких частиц. Поэтому предыдущее соотношение принимает следующий вид:

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \frac{\partial \rho_2' f}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' f\, dV - \int\limits_{\Delta S^*} \rho_2' f v_i n_i\, dS. \tag{3.6}$$

Из теоремы Остроградского — Гаусса (3.3) следует

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_2' f v_i)\, dV) = \int\limits_{\Delta S_2} \rho_2' f v_i n_i\, dS + \int\limits_{\Delta S_*} \rho_2' f v_i n_i\, dS. \tag{3.7}$$

Суммирование выражений (3.6) и (3.7) приводит к равенству (3.4).

Проведем теперь осреднение уравнения неразрывности для жидкости (3.2). В силу равенств (3.6) и (3.7) при $f = 1$ получаем

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \left(\frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho_2' v_i\right) dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2'\, dV + \int\limits_{\Delta S_2} \rho_2' v_i n_i\, dS. \tag{3.8}$$

Введем теперь величину *средней плотности*

$$\rho_2 = \frac{1}{\Delta V_2(t)}\int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2'\, dV = \frac{1}{m\,\Delta V}\int\limits_{m\,\Delta V_2(t)} \rho_2'\, dV. \tag{3.9}$$

С другой стороны, можно определить среднюю скорость w_i движения жидкости через одну из граней S_2^0 макрообъема ΔV, т. е. среднюю по плоскому сечению среды (2.9)

$$w_i \rho_2 = \frac{1}{\Delta S_2^0}\int\limits_{\Delta S_2^0} \rho_2' v_i\, dS = \frac{1}{m\Delta S^0}\int\limits_{\Delta S_2^0} \rho_2' v_i\, dS, \tag{3.10}$$

и снова воспользоваться теоремой (3.3), представляя интеграл по внешним поверхностям объема ΔV как дивергенцию от осредненного массового потока (3.10). Подставляя выражения (3.9) и (3.10) в уравнение (3.8), окончательно получим искомое уравнение неразрывности, справедливое уже для макропотока жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_2 m + \frac{\partial}{\partial x_i} w_i \rho_2 m = 0. \tag{3.11}$$

Заметим, что в формуле (3.10) использовано принятое выше предположение: $n = m$.

Осредним теперь уравнения движения жидкости (3.1)

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' \frac{dv_i}{dt}\, dV - \int\limits_{\Delta V_2(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij}'\right) dV - g_i \int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2'\, dV = 0. \tag{3.12}$$

Из соотношения (3.4) при $f = v_i$ имеем

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' \frac{dv_i}{dt}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' v_i\, dV + \int\limits_{\Delta S_2} \rho_2' v_i v_j n_j\, dS. \tag{3.13}$$

Выражение (3.13) можно записать далее, используя осредненные значения плотности и скорости,

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \rho_2' \frac{dv_i}{dt}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2 w_i) + \frac{\partial}{\partial X_j}(m\rho_2 w_i w_j). \tag{3.14}$$

При этом фактически принято, что $\rho_2 w_i w_j = \overline{\rho_2' v_i v_j}$, т. е. в данном анализе пренебрегается пульсационным переносом импульса из-за отклонений локальных скоростей от средних значений v_i — $- w_i = v_i^*$, а также, что средняя скорость жидкости, определенная как частное от деления среднего по объему импульса на среднюю плотность, равна средней скорости, найденной по правилу (3.10).

По теореме (3.3) имеем

$$\int\limits_{\Delta V_2(t)} \operatorname{div} p_{ij}' \, dV = \int\limits_{\Delta S_2} p_{ij}' n_j \, dS + \int\limits_{S_*} p_{ij}' h_j \, dS = \operatorname{div}(m p_{ij}) - F_i^{(2)}, \qquad (3.15)$$

где оператор div определен уже в макрокоординатах $X_1 X_2 X_3$; $F_i^{(2)}$ — результирующая сила, действующая на жидкость на многочисленных внутренних поверхностях S_* раздела жидкой и твердой фаз в объеме ΔV

$$F_i^{(2)} = \frac{1}{\Delta V_2} \int\limits_{\Delta S_*} p_{ij}' n_j \, dS, \qquad (3.16)$$

а величина p_{ij} определяется как среднее фазовое напряжение жидкости на поверхности грани

$$p_{ij} n_j = \frac{1}{m \Delta S^0} \int\limits_{\Delta S_2^0} p_{ij}' n_j \, dS. \qquad (3.17)$$

Воспользовавшись определением средней плотности (3.9) для выражения третьего слагаемого в уравнении (3.12) и подставляя в него выражения (3.13) и (3.14), получим осредненное уравнение неразрывности импульса для жидкой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \rho_2 w_i) + \frac{\partial}{\partial X_j}(m \rho_2 w_i w_j - m p_{ij}) + F_i^{(2)} - \rho_2 m g_i = 0. \qquad (3.18)$$

Аналогичные преобразования приводят к осредненному уравнению неразрывности для твердой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 (1 - m) + \frac{\partial}{\partial X_i} \rho_1 (1 - m) u_i = 0 \qquad (3.19)$$

и к осредненному уравнению неразрывности импульса для твердой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 (1 - m) u_i) + \frac{\partial}{\partial X_j}(\rho_1 (1 - m) u_i u_j - \sigma_{ij} (1 - m)) - \\ - F_i^{(1)} - \rho_1 (1 - m) g_i = 0, \qquad (3.20)$$

где u_i — средняя скорость смещения твердых частиц; ρ_1 — средняя их плотность, σ_{ij} — среднее напряжение в твердой фазе.

В силу равенства

$$p_{ij}' n_j = -\sigma_{ij}' n_j$$

в точках граничной поверхности S_* (n_j — нормаль, направленная в сторону жидкой фазы) выполняется условие

$$F_i^{(2)} = -F_i^{(1)} = F_i, \qquad (3.21)$$

имеющее известный механический смысл (действие равно противодействию).

Суммирование уравнений (3.18) и (3.19) приводит к уравнению неразрывности импульса во всей среде в целом

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1(1-m)u_i+\rho_2 m w_i)+\frac{\partial}{\partial X_j}(-\Gamma_{ij}+\rho_1(1-m)u_i u_j+\rho_2 m w_i w_j)-$$
$$-(\rho_1(1-m)+\rho_2 m)g_i=0, \qquad (3.22)$$

где $\Gamma_{ij}=(1-m)\sigma_{ij}+mp_{ij}$ — суммарное (полное) напряжение, действующее на поверхности макрообъема ΔV.

Уравнение (3.22) можно было выписать без рассмотрения процедуры осреднения, воспользовавшись общими модельными предположениями. Проведенное выше осреднение по объему ΔV позволило свести проблему построения эффективного уравнения движения фазы к предположению о виде силы взаимодействия F_i.

Ранее при анализе движения взаимопроникающих сред было предложено два различных в общем случае определения силы F_i. Согласно *первому* из них, принадлежащему Н. Е. Жуковскому [70], осредненное движение частиц жидкости в поровом пространстве определяется теми же законами, как и в свободном пространстве (уравнениями Эйлера), но силы вязкостного сопротивления сводятся к эффективной силе R_i, пропорциональной относительной средней скорости потока жидкости. Таким образом, уравнение (3.18) принимает вид

$$\rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t}+\rho_2 w_j\frac{\partial w_i}{\partial X_j}=-\frac{\partial p}{\partial X_i}-\frac{R_i}{m}+\rho_2 g_i, \qquad (3.23)$$

что соответствует следующему определению силы F_i межфазового взаимодействия

$$F_i=R_i+p\frac{\partial m}{\partial X_j} \qquad (3.24)$$

и вполне оправданному пренебрежению вязкими составляющими сил на поверхности ΔS макрообъема по сравнению с вязкими силами на множестве внутренних поверхностей S_* (в силу чего $p_{ij}=-p\delta_{ij}$). Био [260, 261] называет уравнение (3.23) *уравнением относительного движения жидкости*.

Уравнение (3.20) согласно определению (3.24) записывается в виде

$$\rho_1(1-m)\frac{d_1 u_i}{dt}=\frac{\partial(1-m)\sigma_{ij}}{\partial X_j}-p\frac{\partial(1-m)}{\partial X_i}+R_i+\rho_1(1-m)g_i. \qquad (3.25)$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения:

$$\frac{d_1}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial X_j},\quad \frac{d_2}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial X_j}.$$

Уравнения движения (3.5)—(3.7) в общем случае неравных фазовых напряжений предлагались для описания волновых про-

цессов Я. И. Френкелем [215]. При равенстве фазовых напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ эти уравнения переходят в уравнения Х. А. Рахматулина

$$(1-m)\rho_1 \frac{d_1 u_i}{dt} = -(1-m)\frac{\partial p}{\partial X_i} + R_i + \rho_1 (1-m) g_i, \qquad (3.26)$$

$$m\rho_2 \frac{d_2 w_i}{dt} = -m\frac{\partial p}{\partial X_i} - R_i + \rho_2 m g_i,$$

согласно которым обе фазы становятся равноправными. По Х. А. Рахматулину [186] уравнения (3.26) описывают движение взаимопроникающей смеси твердых и жидких частиц или частиц разнородных жидкостей.

В связи с этим рассмотрим величину разности фазовых напряжений

$$\sigma^f_{ij} = (1-m)(\sigma_{ij} + p\delta_{ij}), \qquad (3.27)$$

называемую фиктивными [10, 8] (или эффективными [206]) напряжениями. Нетрудно видеть, что соотношение (1.9) записывается с введением σ^f_{ij} в виде

$$\Gamma_{ij} = (1-m)\sigma_{ij} - mp\delta_{ij} = \sigma^f_{ij} - p\delta_{ij}. \qquad (3.28)$$

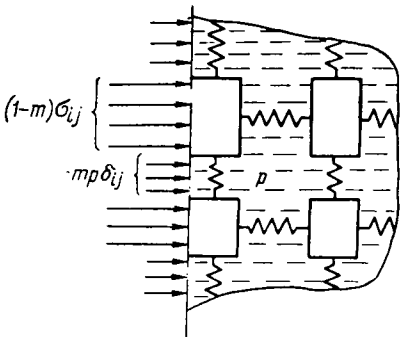


Рис. 1. Схематическое представление контактной передачи импульса в насыщенной пористой среде.

Если учесть, что в насыщенной пористой среде непосредственному измерению поддаются величины суммарных напряжений Γ_{ij} (приложенная в целом к среде нагрузка) и порового давления p (при помощи пьезометра), то оказывается, что именно фиктивные напряжения σ^f_{ij} также доступны измерению и контролю, тогда как и для измерения истинных напряжений σ_{ij} требуется вводить, вообще говоря, переменную пористость — см. соотношение (3.28). Поэтому опытные данные по механике грунтов формулируются чаще всего с использованием фиктивных напряжений.

Фиктивные напряжения физически интерпретируются как та часть истинных напряжений σ_{ij} в твердой фазе, которая обусловлена независимым от жидкости (и единственным в сухой пористой среде) механизмом передачи импульса — по контактам между твердыми зернами.

Иллюстрирующая этот механизм схема представлена на рис. 1 — фиктивные напряжения сжимают «пружинки», действуют на связи между частицами скелета среды. Согласно этим представлениям различие в фазовых напряжениях должно исчезать, скажем, в таких средах, как разбавленные суспензии, если вообще исключены (даже на короткий промежуток времени) взаимные контакты твердых частиц. Поэтому уравнения Х. А. Рахматулина (3.26) должны совпадать с предложенными уравнениями продольного движения суспензий (без учета вязкости обычного типа). Более тонкий анализ течений взвесей, требующий

учета вязкостных напряжений, приводит к появлению асимметричного тензора напряжений в жидкости, возмущенной из-за присутствия взвешенных вращающихся твердых частиц [1].

Если вычесть из уравнения полного импульса (3.22) уравнение относительного движения жидкости (3.23), то можно получить уравнение относительного движения твердой фазы

$$(1-m)\left(\rho_1\frac{d_1u_i}{dt}-\rho_2\frac{d_2w_i}{dt}\right)-\frac{\partial\sigma_{ij}^f}{\partial X_j}-\frac{R_i}{m}-(1-m)(\rho_1-\rho_2)g_i=0, \tag{3.29}$$

в котором в качестве единственных действующих напряжений фигурируют фиктивные напряжения.

Согласно уравнению (3.29) на твердую фазу действует дополнительная сила, равная массе жидкости в объеме твердой фазы, умноженной на ускорение в жидкости, но направленная в противоположную сторону. Это выталкивающая сила обусловлена ускоренным движением, одинаковым для всех жидких частиц, но отличным от ускоренного движения твердых частиц. Другими словами, дополнительная инерционная сила в уравнении (3.29) аналогична присутствующим там силам тяжести, причем разница состоит в том, что поле тяжести вызывает одинаковое ускорение g_i и для твердых и для жидких частиц, а ускорения d_1u_i/dt и d_2w_i/dt в общем случае различны.

Ван Деемтер и Ван дер Лаан [323] для анализа движения суспензии применили использованный метод перехода от уравнений, справедливых в микромасштабе, к осредненным уравнениям для общего случая двухфазных потоков. Они ввели (оставив неопределенной) объемную силу межфазового взаимодействия. В последующем силу межфазового взаимодействия определял Хинце [298], причем при ламинарном течении результирующие уравнения движения фаз совпадают с уравнениями (3.26), однако при этом вводилась дополнительная сила, отражающая эффект присоединенной массы.

В связи с этим обратимся к работе С. М. Рытова, В. В. Владимирского и М. Д. Галанина [194], где исследовалось распространение звука в достаточно разряженных дисперсных системах (например, в суспензиях сферических частиц), в которых можно пренебречь взаимным влиянием твердых частиц. При этом авторы вводили в рассмотрение средние (макроскопические) скорости движения жидкости и частиц и использовали уравнения, эквивалентные системе (3.11), (3.19), (3.22), но в уравнение (3.29) включали дополнительные члены

$$\rho_1\frac{\partial u_i}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t}=\frac{\rho_2}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)+\frac{18\mu}{d^2}(w_i-u_i)+$$

$$+\frac{9\sqrt{\rho_2\mu}}{d\sqrt{\pi t}}\int_0^1\left(\frac{\partial w_i(x_i,z)}{\partial z}-\frac{\partial u_i(x_i,z)}{\partial z}\right)\frac{dz}{\sqrt{1-z}}; \tag{3.30}$$

где d — диаметр частиц; первый член отражает влияние присоединенной массы жидкости при ускоренном относительном движении; второй — вязкостное сток-

[1] Е. Ф. Афанасьев, В. Н. Николаевский. К построению асимметричной гидродинамики суспензий с вращающимися твердыми частицами. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошных сред». К 60-летию академика Л. И. Седова. М., изд-во «Наука», 1969.

сово трение; третий — поправка на стоксово трение из-за неравномерности движения.

Обратим теперь внимание на то, что слева в уравнении (3.30), как и в остальных уравнениях движения, фигурируют средние по элементарному макрообъему скорости, а в правой части, строго говоря, должны стоять локальные значения относительной скорости жидкости, относящиеся к фиксированным точкам внутри этого объема, а именно, значения скорости жидкости на бесконечном (в масштабе диаметра твердой частицы) удалении от нее. При отождествлении скоростей в правой и левой частях уравнения (3.30) фактически принимается гипотеза, что средняя скорость совпадает с ее локальным значением вдали от твердой частицы. Очевидно, что это предположение нестрого, а отклонения от него растут с ростом концентрации твердых частиц.

Введение присоединенной массы отражает динамическое влияние возмущений, накладываемых на течение жидкости движением в ней твердой частицы. Для ее определения нужно вычислить, как известно, кинетическую энергию возмущенного движения. Часть этой кинетической энергии учитывается при вычислении кинетической энергии движения со средней скоростью, отличной от входящего в уравнение (3.30) локального значения, а другая часть представляет собой кинетическую энергию пульсационного движения, которым пренебрегалось при получении уравнений движения (3.29). Второй и третий члены в уравнении (3.30) по аналогичным причинам не представляют собой точные значения вязкостных сил сопротивления R_i, однако они позволяют оценить его порядок.

Уравнения движения, эквивалентные уравнениям (3.26), часто использовались в практике решения задач динамики пыльного газа, эмульсии и т. п. [313, 314].

Переход от насыщенных, произвольным образом сцементированных сред к разбавленным суспензиям может быть учтен изменением закона, связывающего фиктивные напряжения с другими осредненными параметрами системы, что открывает определенные возможности в построении механических моделей, описывающих такие сложные сплошные среды, как, например, кипящий слой, где сыпучая среда переходит в псевдоожиженное состояние.

Согласно *второму* определению силы F_i (схема II) межфазовый обмен импульсом двух взаимопроникающих сред полностью сводится к объемной силе

$$F_i = mR_i, \tag{3.31}$$

т. е. уравнения движения фаз (3.18), (3.20), если бы можно было принять гипотезу (3.31), записались бы в виде

$$(1-m)\rho_1 \frac{d_1 u_i}{dt} = \frac{\partial (1-m)\sigma_{ij}}{\partial x_j} + mR_i,$$

$$m\rho_2 \frac{d_2 w_i}{dt} = -\frac{\partial mp}{\partial x_i} - mR_i. \tag{3.32}$$

Уравнения (3.32) при $\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij}$, $p = p_2$ предлагались Н. А. Слезкиным как уравнения фильтрации в пористых средах [198] и уравнения движения пульпы [199].

Эти уравнения соответствуют общему виду уравнений движения смеси, приведенному в работе Труселлла [320]

$$\rho_B \frac{d_B u_i^{(B)}}{dt} = -\frac{\partial p_B}{\partial x_i} + \sum_A F_i^{(AB)} + \rho_B g_i, \tag{3.33}$$

где ρ_B — масса B-составляющей в единице объема; p_B — гидростатическое давление, равное в условиях равновесия парциальному давлению B-составляющей [320].

Трусделл указывает, что такой подход восходит к Максвеллу [320] и что уравнения (3.33), предложенные Стефаном [300], описывают движение смеси идеальных жидкостей. Пригожин и Мазур [313] использовали уравнения (3.33) для описания течения смеси сверхтекучей и нормальной компонент жидкого гелия [217]. При этом они отметили, что в случае газов парциальные давления определяются как $p_B = N_B P$, где P — суммарное давление; N_B — массовая концентрация компонент (закон Дальтона).

Существенно, что предположение (3.31) обычно используется при рассмотрении движения таких смесей жидкостей и газов, размеры элементарных частиц в которых сопоставимы с молекулярными масштабами. Так, в упомянутой работе Трусделла [320] с точки зрения механики двух взаимопроникающих континуумов разбирается правомочность обычного для термодинамики необратимых процессов способа определения диффузионного потока вещества. В таких средах нельзя выделить микрообъемы сплошного материала только одного из составляющих смесь веществ. Назовем эти среды *многокомпонентными* в отличие от *многофазных*, для которых существенно наличие перегородок, внутри которых материал фазы однороден и подчиняется соответствующим уравнениям механики сплошной однофазной среды [1].

Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы показать, что именно определению F_i согласно выражению (3.24) соответствует модель двухфазной среды, одной из фаз которой является жидкость.

В самом деле, в условиях покоя без учета сил гравитации во всех точках жидкой фазы, заполняющей пористую среду переменной пористости, должно установиться постоянное давление, а следовательно, постоянным должно быть и среднее давление, как это получается из уравнения (3.23) Н. Е. Жуковского. В то же время согласно системе (3.32) в покоящейся жидкости в соответствующих условиях не среднее давление p постоянно, а произведение $mp = \text{const}$. Этот пример заставляет при изучении динамики насыщенных пористых сред отказаться от гипотезы (3.31) и пользоваться предложением Н. Е. Жуковского.

В работах И. Пригожина и др. [313] предлагается вводить барицентрическую скорость движения смеси u_i° по формуле

$$\rho_0 u_i^\circ = (1-m)\,\rho_1 u_i + m\rho_2 w_i, \tag{3.34}$$

т. е. скорость движения центра тяжести элементарного макрообъема гетерогенной среды. В связи с этим Гроот [55] записывает уравнение импульса всей среды в целом виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_0 u_i^\circ + \frac{\partial}{\partial X_i}\rho_0 u_i^\circ u_j^\circ - \frac{\partial \Gamma_{ij}^*}{\partial X_j} = 0. \tag{3.35}$$

[1] На причину различия формулировок определяющих уравнений для многокомпонентных и многофазных жидкостей указал Л. И. Седов (Проблемы науки. М., изд-во «Знание», 1966) — для объема V пространства, занимаемого смесью, в первом случае характерно условие $V_1 = \cdots = V_i = \cdots = V$, а во втором $V_1 + \cdots + V_i + \cdots = V$. Здесь V_i — объем, занятый i-ой составляющей смеси.

Можно показать также, что уравнение суммарного импульса среды (3.22) при использовании соотношения (3.34) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_0 u_i^c + \frac{\partial}{\partial X_i}\rho_0 u_i^p u_j^p + \frac{\partial}{\partial X_i}\frac{\rho_2\rho_1 m(1-m)}{\rho_0}(u_i-w_i)(u_j-w_j) - \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial X_j} = 0, \quad (3.36)$$

отличающийся от уравнения (3.35) дополнительным нелинейным членом, отражающим межфазный пульсационный перенос импульса. Однако это расхождение кажущееся, если принять, что Γ_{ij} и Γ_{ij}^* различаются именно на величину указанного пульсационного переноса импульса. Это замечание существенно при сопоставлении двускоростной (см. примечание на стр. 28) и диффузионной теории динамики суспензий.

§ 4. ТЕРМОДИНАМИКА НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

Общий анализ осредненных уравнений движения и энергии жидких и газовых смесей был выполнен Трусделлом [320], который подробно рассмотрел случай передачи импульса между составными частями смеси согласно уравнению (3.31) (что соответствует случаю многокомпонентной жидкости) и сформулировал условие нулевого обмена энергией. Вместе с тем Трусделл формально отметил возможности иных определений в моделях взаимопроникающих сред.

Внутренний обмен импульса в рассматриваемых здесь многофазных средах определяется гипотезой Н. Е. Жуковского (3.24). В качестве второй гипотезы примем [312], что *осредненное уравнение притока тепла к жидкости, заполняющей поровое пространство, такое же, как и уравнение притока тепла к элементу сплошного материала этой жидкости*, а работа вязких сил (учитываемая здесь как произведение силы взаимодействия R_i на относительное перемещение вязкой жидкости в пористой среде) полностью переходит в тепло. Соответственно уравнение притока тепла к жидкой фазе запишем в виде

$$\frac{d_2 E_2}{dt} + p\frac{d_2}{dt}\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_2 m}\frac{\delta Q_2}{dt} + \frac{R_i}{\rho_2 m}(w_i - u_i), \quad (4.1)$$

где E_2 — удельная внутренняя энергия жидкости; δQ_2 — внешний приток тепла в жидкую фазу.

С другой стороны, можно осреднить уравнение неразрывности полной энергии для жидкости, справедливое для микропотока в поровом пространстве

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_2' E_2' + \rho_2 \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_2' E_2' v_i + \rho_2' \frac{v^2}{2} v_i - p_{ij}' v_j + J_i^{(2)}\right) = 0 \quad (4.2)$$

по всему поровому пространству элементарного макрообъема ΔV. В уравнении (4.2) E_2' — внутренняя энергия жидкой частицы; $j_i^{(2)}$ — компонента потока тепла в жидкость. Штрих означает, что соответствующая величина относится к микроточке среды.

Применение теории Остроградского — Гаусса (3.3) и равенства (3.4) приводит к уравнению (теперь $f = E_2' + \frac{v^2}{2}$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta V_2(t)}\left(\rho_2' E_2' + \rho_2'\frac{v^2}{2}\right)dV + \int\limits_{\Delta S_2}\rho_2'\left(E_2 + \frac{v_2}{2}\right)v_i n_i\,dS + \int\limits_{\Delta S_2} j_i^{(2)} n_i\,dS +$$

$$+ \int\limits_{S_*} j_i^{(2)} n_i\,dS - \int\limits_{\Delta S_2} p_{ij}' v_j n_i\,dS - \int\limits_{\Delta S_*} p_{ij}' v_j n_i\,dS = 0. \qquad (4.3)$$

Вводя среднюю энергию жидкости E_2 по формуле

$$\rho_2 E_2 = \frac{1}{m\,\Delta V}\int\limits_{\Delta V_2}\rho_2' E_2'\,dV, \qquad (4.4)$$

и пренебрегая пульсационным переносом энергии, работой пульсационных сил и работой вязкостных сил на поверхности ΔS_2, получим следующее осредненное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(E_2 + \frac{w^2}{2}\right)m\rho_2\right) + \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\rho_2 m\left(E_2 + \frac{w^2}{2}\right)w_i + mp\delta_{ij}w_j + \right.$$

$$\left. + mJ_i^{(2)}\right) + \frac{\delta W}{dt} + q_2 = 0, \quad \frac{\delta Q_2}{dt} = -\frac{\partial J_i^{(2)}}{\partial x_i} - q_2. \qquad (4.5)$$

Величина $J_i^{(2)}$ играет роль внешнего (по отношению к элементарному макрообъему ΔV) потока тепла по жидкой фазе

$$J_i^{(2)} = \frac{1}{\Delta S_2^0}\int\limits_{\Delta S_2^0} j_i^{(2)}\,dS, \qquad (4.6)$$

а символом q_2 обозначена интенсивность теплового обмена между твердой и жидкой фазами через внутренние границы S_*:

$$q_2 = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S_*} j_i^{(2)} n_i\,dS. \qquad (4.7)$$

Далее величина работы в единицу времени $\delta W/dt$ означает эффективную работу сил, действующих на границах S_*:

$$\frac{\delta W}{dt} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S_*} p_{ij}' n_j w_i\,dS. \qquad (4.8)$$

При неподвижности поверхности раздела S_* работа δW равна нулю. Это означает, что работа δW не включает в себя работу вязких сил диссипации при движении жидкости, если твердая фаза неподвижна.

Умножив уравнение движения жидкости (3.23) на ее скорость, получим осредненное уравнение кинетической энергии

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 m w_i^2) + \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\rho_2 m\frac{w_i^2}{2}w_i\right) + w_i\frac{\partial}{\partial X_i}pm = pw_i\frac{\partial m}{\partial X_j} - R_i w_i. \qquad (4.9)$$

Вычитая уравнение кинетической энергии (4.9) из уравнения полной фазовой энергии (4.5), получим уравнения для приращения внутренней энергии или иначе — уравнения притока тепла к жидкой фазе

$$\rho_2 m \frac{d_2 E_2}{dt} + pm \frac{\partial w_i}{\partial X_i} + pw_i \frac{\partial m}{\partial X_i} + \frac{\delta W}{dt} = \frac{\delta Q_2}{dt} + R_i w_i. \quad (4.10)$$

Сопоставление уравнений (4.1) и (4.10) показывает, что они идентичны (с учетом уравнения неразрывности), если

$$\frac{\delta W}{dt} = p \frac{\partial m}{\partial t} + R_i u_i. \quad (4.11)$$

Таким образом, постулирование уравнения (4.1) эквивалентно предположению (4.11) о величине работы напряжений на поверхностях раздела S_* — см. уравнение (4.8).

Аналогично можно получить уравнение полной энергии для твердой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_1 (1-m) \left(E_1 + \frac{u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{\rho_1 (1-m) \left(E_1 + \frac{u^2}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sigma_{ij} (1-m) u_j + J_i^{(1)}\right\} - \frac{\delta W}{dt} - q = 0, \quad (4.12)$$

где использовано условие непрерывности потока, тепла, действующих сил [1] и скоростей смещения на поверхностях S_* раздела фаз.

Если теперь, умножая уравнение движения твердой фазы (3.25) (без учета силы тяжести) на скорость u_i, получить уравнение кинетической энергии этой фазы

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 (1-m) u_i^2 + \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{\rho_1 (1-m) \frac{u^2}{2} u_i\right\} - u_i \frac{\partial}{\partial X_i} (1-m) \sigma_{ij} =$$
$$= p u_i \frac{\partial (1-m)}{\partial X_i} + R_i u_i \quad (4.13)$$

и вычесть его из уравнения (4.12), то результатом будет уравнение притока тепла к твердой фазе

$$\rho_1 (1-m) \frac{d_1 E_1}{dt} - (1-m) \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) +$$
$$+ p u_i \frac{\partial (1-m)}{\partial X_i} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{\delta Q_1}{dt} - R_i u_i. \quad (4.14)$$

Если принять определения (4.11), то уравнение притока тепла к твердой фазе преобразуется следующим образом:

$$\rho_1 (1-m) \frac{d_1 E_1}{dt} - \sigma_{ij}^f \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) + \rho_1 (1-m) p \frac{d_1}{dt} \frac{1}{\rho_1} = \delta Q_1 / dt. \quad (4.15)$$

[1] Здесь пренебрегается тем самым поверхностными силами (ср. В. Н. Николаевский и др., Движение углеводородных смесей в пористых средах. М., изд-во «Недра», 1968).

Н. А. Слезкин [199] выписал уравнение энергии для всей смеси в целом. В. И. Марон и В. А. Медведев [139] в отличие от Х. А. Рахматулина [186] исследовали динамику смеси газов, т. е. вводили различные парциальные давления (как и по схеме II, см. § 3), определяемые парциальными плотностями и температурами. Работа сил межкомпонентного взаимодействия определялась как сумма $F_i^{(kn)} w_i^{(n)}$ по всем компонентам смеси ($k = 1, \ldots, N$, $n = 1, \ldots, N$, $k \neq n$), где $w_i^{(n)}$ — скорость n-ой компоненты, $F_i^{(kn)}$ — сила межкомпонентного взаимодействия. Сила $F_i^{(kn)}$, равно как и работа сил взаимодействия, осталась неопределенной. Для многокомпонентной смеси идеальных газов соответствующие формулы можно получить при использовании методов статистической механики, как это делается в теории плазмы — смеси заряженного (электронного) и электрически нейтрального (ионного) газов [35].

В статье Ван Деемтера и Ван дер Лаана [323] выписывались уравнения кинетической энергии фаз, но работа сил вязкостной диссипации внутри каждой из фаз и работа сил на поверхностях раздела оставались неопределенными. Хинце [298] рассматривал осредненные уравнения движения фаз (см. также § 3), однако при формулировке уравнений энергии он ограничился уравнением кинетической энергии для всей среды в целом (а не для каждой из фаз в отдельности). Уравнение Хинце включает в себя, в частности, сток энергии с интенсивностью $R_i (w_i - u_i)$.

Уравнения (4.10), (4.15) являются дифференциальной формулировкой первого закона термодинамики. Второй закон термодинамики записывается для первой и второй фаз соответственно в виде

$$\rho_1 (1-m) T_1 \frac{d_1 s_1}{dt} = \frac{\delta Q_1}{dt}, \tag{4.16}$$

$$\rho_2 m T_2 \frac{d_2 s_2}{dt} = \frac{\delta Q_2}{dt} + R_i (w_i - u_i), \tag{4.17}$$

где s_k, T_k — фазовые энтропия и температура.

Уравнение (4.17) означает, что внутри твердой фазы не происходит диссипации механической энергии; вязкостная диссипация происходит только в жидкости — см. уравнение (4.16).

Уравнения (4.16) и (4.17) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-m)\rho_1 s_1 = -\frac{\partial}{\partial X_i}\left((1-m)\rho_1 s_1 u_i + \frac{J_i^{(1)}}{T_1}\right) - \frac{1}{T_1^2}\left(J_i^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial X_i}\right) + q/T_1, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m\rho_2 s_2 = -\frac{\partial}{\partial X_i}\left(m\rho_2 s_2 w_i + \frac{J_i^{(2)}}{T_2}\right) - \frac{1}{T_2^{(2)}}\left(J_i^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial X_i}\right) - q/T_2. \tag{4.19}$$

Здесь использовано соотношение

$$\frac{1}{T_к} \frac{\partial}{\partial X_i} J_i^{(k)} = \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{J_i^{(k)}}{T_к}\right) + \frac{1}{T_k^2}\left(J_i^{(k)} \frac{\partial T_к}{\partial X_i}\right). \tag{4.20}$$

Суммируя уравнения (4.18) и (4.19), получим уравнение для энтропии единицы объема пористой среды

$$\rho_0 s = (1-m)\rho_1 s_1 + m\rho_2 s_2; \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial(\rho_0 s)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\rho_1 (1-m) s_1 u_i + \rho_2 m s_2 w_i + \frac{J_i^{(1)}}{T_1} + \frac{J_i^{(2)}}{T_2}\right) -$$

$$- \frac{1}{T_1^2} J_i^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial X_i} - \frac{1}{T_2^2} J_i^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial X_i} + R_i \frac{w_i - u_i}{T_2} + q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right). \tag{4.22}$$

С другой стороны, уравнение для энтропии s должно записываться следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_0 s}{\partial t} = -\frac{\partial J_i^s}{\partial X_i} + \sum, \tag{4.23}$$

где J_i^s — поток энтропии; $\sum$ — скорость локального возникновения энтропии в единице объема среды.

Сравнивая уравнения (4.22) и (4.23), получим для $\sum$ следующее выражение:

$$\sum = -\frac{1}{T_1^2}\vec{J}^{(1)}\operatorname{grad} T_1 - \frac{1}{T_2^2}\vec{J}^{(2)}\operatorname{grad} T_2 + \vec{R}\frac{\vec{w}-\vec{u}}{T_2} + q\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right). \tag{4.24}$$

Согласно основному уравнению термодинамики необратимых процессов

$$\sum = \vec{J}^{(1)}\vec{F}_1 + \vec{J}^{(2)}\vec{F}_2 + \vec{R}\vec{F}_3 + qF_4,$$

где $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ — соответствующие потокам $\vec{J}^{(1)}$, $\vec{J}^{(2)}$, $\vec{R}$, q — термодинамические силы. В нашем случае

$$\vec{F}_1 = -\frac{1}{T_1^2}\operatorname{grad} T_1;\ \vec{F}_2 = -\frac{1}{T_2}\operatorname{grad} T_2;\ \vec{F}_3 = \frac{\vec{w}-\vec{u}}{T_2};\ F_4 = \frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1}.$$

Для нахождения связей между потоками и термодинамическими силами при малых отклонениях от состояния равновесия воспользуемся известными двумя принципами термодинамики необратимых процесов [55]. Согласно первому из них — принципу Онзагера — потоки прямо пропорциональны вызывающим их термодинамическим силам, причем матрица коэффициентов пропорциональности $L_{\nu k}$ обладает свойством симметрии $L_{\nu k} = L_{k\nu}$. При этом подразумевается, что коэффициенты L_{ik} могут быть функциями параметров состояния среды (см. также § 19). Согласно второму принципу — принципу Кюри — сила не может вызвать потока, имеющего другую тензорную размерность. Соответственно формально можно записать

$$\vec{J}^{(k)} \sum_{\nu=1}^{3} L_{k\nu}\vec{F}_\nu,\ \vec{R} = L_{31}\vec{F}_1 + L_{32}\vec{F}_2 + L_{33}\vec{F}_3,\ q = LF_4. \tag{4.25}$$

Так как, по предположению, тепловое взаимодействие между фазами учитывается потоком q, то нужно положить $L_{12} = L_{21} = L_{31} = L_{13} = 0$.

Поэтому

$$J^{(1)} = -\frac{L_{11}}{T_1^2}\operatorname{grad} T_1,\quad J^{(2)} = -\frac{L_{22}}{T_2^2}\operatorname{grad} T_2 - L_{23}\frac{\vec{w}-\vec{u}}{T_2}, \tag{4.26}$$

$$\vec{R} = -\frac{L_{23}}{T_2^2}\operatorname{grad} T_2 + L_{33}\frac{\vec{w}-\vec{u}}{T_2},\quad q = \frac{L}{T_1 T_2}(T_2 - T_1).$$

Если скелет абсолютно жесткий ($u_i = 0$), то выражения для $\vec{J}^1$, $\vec{J}^2$, $\vec{R}$ совпадают с выражениями, полученными в работе П. П. Золотарева [75].

Входящие в выражения для $\vec{J}^1$, $\vec{J}^2$, $\vec{R}$ члены с коэффициентом L_{23} для пористой среды, насыщенной однофазной жидкостью, как отмечено в работе [75], должны быть малы по сравнению с членами L_{22}, L_{23}. Это связано с тем, что вероятными физическими явлениями, которые учитываются указанными членами, являются термодиффузия и эффект теплового скольжения (для газонасыщенных сред). В обычных условиях этими эффектами можно пренебречь.

Были выполнены [75] следующие оценки. При тепловом скольжении $L_{23}/T_2^2 = \frac{3}{2} dR/(Mv)$, где d — средняя длина свободного пробега; v — скорость молекулярного движения; R — газовая постоянная; M — молекулярный вес. Для воздуха при 60° С и атмосферном давлении $L_{23} \sim T_2^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ *см*^{3}/*сек*·*град*. При более высоких давлениях (L_{23}/T_2^2) еще меньше, так как $d \approx 1/p$. Следовательно, при фильтрации газа соответствующий член обычно мал по сравнению с членом вязкостного сопротивления [75].

Учитывая, что наше рассмотрение применимо при $(T_1 - T_2)/T_* \ll 1$, где T_* — некоторая средняя температура среды, и полагая

$$\frac{L_{11}}{T_1^2} = mD_1, \quad \frac{L_{22}}{T_2^2} = (1-m)D_2, \quad \frac{L}{T_*^2} = \varkappa, \quad \frac{L_{33}}{T_2} = \frac{m^2\mu}{k} = r$$

(k — проницаемость среды), получим для $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, R_i, q выражения

$$J^{(1)} = -mD_1 \operatorname{grad} T_1, \quad J^{(2)} = -(1-m) D_2 \operatorname{grad} T_2,$$

$$R_i = r(w_i - u_i), \quad q = \varkappa (T_2 - T_1). \tag{4.27}$$

Из уравнений (4.18) и (4.19) с учетом (4.27) при $u_i = w_i = 0$ следуют уравнения передачи тепла в насыщенных пористых средах, рассмотренных в работах [74, 193].

Таким образом, в частном случае малой разности скоростей движения фаз термодинамика необратимых процессов приводит к фундаментальному закону теории фильтрации — закону Дарси. Иногда обобщение закона Дарси для подвижной твердой фазы ($u_i \neq 0$) называют законом Дарси — Герсеванова [46, 214].

В работе, посвященной гидротермодинамике жидкого гелия, И. Пригожин и П. Мазур [313], взяв в основу принцип Онзагера, нашли возможным определить силу межфазового взаимодействия согласно формуле $R_i = (w_i - u_i) f(|\vec{w} - \vec{u}|)$. Если воспользоваться этим приемом в нашем случае, как легко видеть, получится соотношение

$$R_i = r(w_i - u_i) + b(w_i - u_i)\,|w_i - u_i|, \tag{4.28}$$

которое можно интерпретировать как двучленный закон фильтрации. Переход от закона Дарси к двучленному закону фильтрации, как известно, связан с ростом относительного числа Рейнольдса: $\mathrm{Re} = (\rho_2/\mu)\sqrt{k/\mu}\,|\vec{w} - \vec{u}|$ (μ — вязкость жидкости). На рис. 2, 3 представлены графики функции $f(\mathrm{Re})$, где $r = \mu \frac{m(1-m)}{a} f(\mathrm{Re})$, для наиболее характерных пористых сред.

Соотношение $q = \varkappa (T_2 - T_1)$ для описания осредненного межфазового перетока в сплошных гетерогенных средах было введено Л. И. Рубинштейном [193].

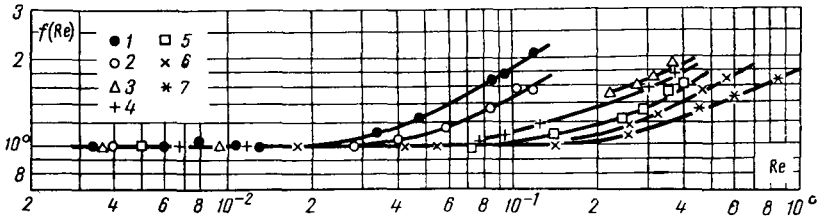


Рис. 2. Представление экспериментальных данных Фенчера, Льюиса и Бернса в виде $f = f$ (Re):

№ образца	$d_{ср}$, см	m	k, д
1	0,010	0,197	0,182
2	0,0065	0,192	0,130
3	0,025	0,119	1,13
4	0,014	0,159	0,35
5	0,017	0,269	2,50
6	0,014	0,136	0,355
7	0,016	0,221	3,30

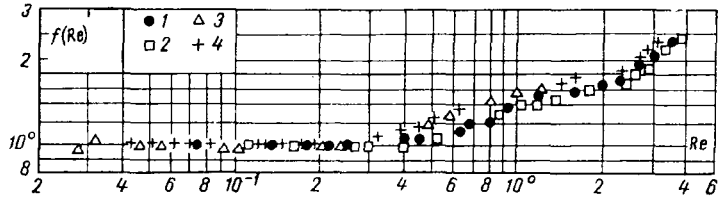


Рис. 3. Представление экспериментальных данных Н. М. Жаворонкова, М. Э. Аэрова и Н. Н. Умника в виде $f = f$ (Re):

№ образца	Характеристика	d, см	m	$k \cdot 10^5$, см^2
1	Дробь	0,246	0,405	2,7
2	Шарики	0,319	0,398	4,1
3	Дробь	0,246	0,394	2,5
4	Шарики	0,319	0,385	3,64

Определение согласно условиям (4.27) внешних притоков тепла в фазы справедливо как примерная оценка, если в рассматриваемой фазе нет изолированных частиц. Примером таких фаз и являются жидкость и твердый скелет в насыщенных пористых средах. При нарушении этого условия необходимо-

прибегать к усложненным теориям обобщенной проводимости гетерогенных систем. Предельный пример такого рода нарушений — взвеси, где все твердые частицы оказываются взаимоизолированными ($J_i^{(1)} = 0$).

Интерпретация закона (4.27), определяющего силу R_i для взвеси, связана с формулой Стокса (см. второе слагаемое справа уравнения (3.30)). Сопоставление уравнений (4.27) и (3.30) показывает, что «проницаемость» взвеси $k = (1/18)\, d^2 m\, (1 - m)^{-1}$. Однако третье слагаемое правой части уравнения (3.30), отражающее нестационарность режима течения в микроканалах, не учитывается в (4.27). Как и следовало ожидать, методы существующей термодинамики необратимых процессов позволяют описать микростационарные процессы (см. § 11).

В связи с этим М. Био [260] вводит понятие вязкодинамического оператора $Y(z)$, действие которого на величину относительной скорости фаз определяет результирующую силу межфазного взаимодействия

$$R_i = Y(z)(w_i - u_i), \quad z = \frac{\partial}{\partial t},$$

причем по М. Био оператор $Y(z)$ учитывает также эффект присоединенной массы (см. первое слагаемое в правой части уравнения (3.30).

Суммирование уравнений (4.1) и (4.17), а также (4.15) и (4.16) приводит к соотношениям Гиббса для жидкой и твердой фаз.

$$\frac{d_2 E_2}{dt} + p \frac{d_2}{dt} \frac{1}{\rho_2} = T_2 \frac{d_2 s_2}{dt}, \tag{4.29}$$

$$\frac{d_1 E_1}{dt} - \frac{1}{\rho_1 (1-m)} \sigma_{ij}^f \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + p \frac{d_1}{dt} \frac{1}{\rho_1} = T_1 \frac{d_1 s_1}{dt}. \tag{4.30}$$

Поскольку средняя внутренняя энергия жидкости подчиняется уравнению (4.29) — такому же, что и у свободной жидкости, — то можно предположить, что средняя энергия E_2 так же зависит от средних параметров состояния (ρ_2, s_2 или p, T_2), как и локальная энергия E_2' (соответственно от локальных значений ρ_2', s_2' или p', T_2'). Уравнение состояния жидкости определится соотношением

$$p = \left(\frac{\partial E_2}{\partial V_2} \right)_{s_2 = \text{const}}, \quad V_2 = \frac{1}{\rho_2} \tag{4.31}$$

и, в частности, в разрешенном виде

$$\rho_2 = \rho_2^\circ \sqrt[\varkappa_2]{1 + \beta_2 \varkappa_2 (p - p_0)}, \tag{4.32}$$

где $\varkappa_2$, β_2 — слабоменяющиеся функции энтропии s_2. Для воды в диапазоне до 10^4 *ат* имеем $\varkappa_2 = 7$, $\beta_2 \varkappa_2 = 3000$ *ат*$^{-1}$.

Анализ эффективного уравнения состояния твердой фазы осложняется фактическим наличием двух систем напряжений, определяющих гидростатическое сжатие сплошного материала под воздействием порового давления в жидкости и деформацию всего скелета в целом из-за фиктивных напряжений. В связи с этим введем в рассмотрение первый θ инвариант тензора σ_{ij} истинных средних напряжений в твердой фазе, связанный с первым инвариантом тензора фиктивных напряжений $\theta^f = \sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f + \sigma_{33}^f$ соотношением $(1/3)\theta^f =$

$= (1 - m)(1/3)\theta + (1-m)\,p$. Тогда уравнение (4.30) можно представить в виде

$$\frac{d_1E_1}{dt} - \frac{\theta}{3}\frac{d_1}{dt}\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\theta^f}{3}\frac{d_1}{dt}\frac{1}{1-m} - \frac{\sigma^f_{ij} - \frac{1}{3}\theta^f\delta_{ij}}{(1-m)\rho_1} \times$$

$$\times \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = T_1\frac{d_1s_1}{dt}, \qquad (4.33)$$

т. е. внутренняя энергия является функцией истинного среднего давления $(-1/3)\,\theta$ и фиктивных напряжений $E_1 = E_1(\theta;\ \sigma^f_{ij};\ T)$, причем при неизменной пористости — только истинных средних напряжений.

В условиях *гидростатического сжатия* $\sigma^f_{ij} \equiv \frac{1}{3}\theta^f\delta_{ij}$ согласно уравнению (4.33) имеем

$$\frac{1}{3}\theta = -\left(\frac{\partial E_1}{\partial V_1}\right)_{m,\,s_1}, \quad \frac{1}{3}\theta^f = \rho_1\,(1-m)^2\left(\frac{\partial E_1}{\partial m}\right)_{\rho_1,\,s_1}, \qquad (4.34)$$

где $V_1 = 1/\rho_1$ — удельный объем материала твердой фазы.

Если теперь предположить, что внутреннюю энергию E_1 можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$E_1 = E_1^p(\rho_1,\ s_1) + E_1^f(m_1,\ s_1), \qquad (4.35)$$

где E_1^p — удельная внутренняя энергия сплошного материала твердой фазы; E_1^f — удельная внутренняя энергия пористой среды, составленной из недеформируемых (в среднем) твердых частиц, то первое из соотношений (4.34) можно представить в виде

$$\rho_1 = \rho_1^0\sqrt[\varkappa_1]{1 + \varkappa_1\beta_1(\theta - \theta_0)}, \qquad (4.36)$$

задавая для $\varkappa_1$, β_1 — слабоменяющихся функций энтропии (или температуры) — те же значения, что и для обычных сплошных минералов или горных пород.

Согласно второму из соотношений (4.34) и предположения (4.35) полную объемную деформацию e можно задавать в виде нелинейной функции от двух переменных[1]: $e = \varphi(\theta,\ \theta^f)$, или $e = \varphi\ (p,\ \theta^f)$. Для малых приращений деформации будет справедлива связь

$$de = \varphi'_\sigma\,d\theta + \varphi'_p\,dp. \qquad (4.37)$$

Среды, характеризуемые условием $\varphi_\sigma \gg \varphi_p$, можно назвать *мягкими*. Ниже подробно будут рассмотрены (§ 5) линейноупругие деформации скелета насыщенной пористой среды.

---

[1] Рассмотрение проводится в рамках обычных для теорий деформаций представлений. Более тонкие эффекты выявляются при учете зависимости объемных деформаций переупаковки от сдвига, см. [172], где содержатся ссылки на другие источники.

Сумма уравнений полных энергий (4.5) и (4.12) с учетом (4.11) приводит к уравнению *полной суммарной энергии среды*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_1(1-m)\left(E_1+\frac{u^2}{2}\right)+\rho_2 m\left(E_2+\frac{w^2}{2}\right)\right\}+$$
$$+\operatorname{div}\left\{\rho_1(1-m)\vec{u}\left(E_1+\frac{u^2}{2}\right)+\rho_2 m\vec{w}\left(E_2+\frac{w^2}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+mp\vec{w}-(1-m)\sigma_{ij}\vec{u}+\vec{J}^{(1)}+\vec{J}^{(2)}\right\}=0. \tag{4.38}$$

Для частного случая *абсолютно жесткого скелета*: $u_i=0$, $\rho_1 E_1 = c_1 T_1$, и уравнение полной суммарной энергии среды (4.38) представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{m_0\rho_2\left(E_2+\frac{w^2}{2}\right)+(1-m_0)c_1T_1\right\}+$$
$$+\operatorname{div}\left\{m_0\rho_2\left(E_2+\frac{w^2}{2}\right)\vec{w}+m_0p\vec{w}+\vec{J}^{(1)}+\vec{J}^{(2)}\right\}=0, \tag{4.39}$$

а в силу соотношений

$$ds_2=\frac{c_2}{T_2\rho_2}dT_2-\left(\frac{\alpha_2}{\rho_2}\right)dp,\quad \alpha_2=-\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial T_2}\right)_p, \tag{4.40}$$
$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial p}\right)_{h_2}=\frac{T_2\alpha_2-1}{c_2}=-z_2$$

уравнение энергии жидкости и уравнение (4.38) можно переписать следующим образом:

$$m\rho_2\frac{d}{dt}\left(\frac{w^2}{2}\right)+mc_2\frac{\partial T_2}{\partial t}-mT_2\alpha_2\frac{\partial p}{\partial t}+$$
$$+mc_2\vec{w}(\operatorname{grad}T_2+z_2\operatorname{grad}p)=-\operatorname{div}\vec{J}^{(2)}+q, \tag{4.41}$$
$$m\rho_2\frac{d}{dt}\left(\frac{w^2}{2}\right)+mc_2\frac{\partial T_2}{\partial t}+(1-m)c_1\frac{\partial T_1}{\partial t}-mT_2\alpha_2\frac{\partial p}{\partial t}+$$
$$+mc_2\vec{w}(\operatorname{grad}T_2+z_2\operatorname{grad}p)=-\operatorname{div}(\vec{J}^{(1)}+\vec{J}^{(2)}). \tag{4.42}$$

Здесь z_2 — коэффициент Джоуля — Томсона фильтрующейся жидкости, который определяет изменения температуры T_2 при постоянной энтальпии $h_2=E_2+p\frac{1}{\rho_2}$. У идеальных газов $z_2=0$, у реальных $z_2=0$ только в точке инверсии.

Эффект Джоуля — Томсона подробно излагается в общих курсах по термодинамике. Его роль в процессах фильтрации жидкости и газа в пористых горных породах исследовалась в работах Б. Б. Лапука [120, 121] и Э. Б. Чекалюка [232].

При $T_1=T_2=T$ в предположении:

$$\vec{J}^{(1)}=-(1-m)D_1\operatorname{grad}T_1,\quad \vec{J}^{(2)}=-mD_2\operatorname{grad}T_2$$

(D_j — коэффициенты теплопроводности для фаз) уравнение (4.42) эквивалентно уравнению, полученному Э. Б. Чекалюком [232]. Уравнения сохранения полной энергии для фаз при $q = \varkappa (T_1 - T_2)$ ($\varkappa$ — коэффициент теплообмена между фазами) совпадают с уравнениями, рассмотренными И. А. Чарным [227]. Аналогичные уравнения сохранения для Мокадама [153] записаны в работе иначе, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_0\rho_2\left(E_2+\frac{w^2}{2}\right)\right)=-\operatorname{div}\left\{m_0\rho_2\left(E_2+\frac{w^2}{2}\right)\vec{w}+mp\vec{w}+J^{(2)}\right\}-\vec{R}\vec{w},$$

$$(1-m_0)\,c_1\frac{\partial T_1}{\partial t}=-\operatorname{div}\vec{J}^{(1)}+\vec{R}\vec{w} \qquad (4.43)$$

и не учитывают, как отмечено в [75], тот факт, что вязкостная генерация тепла происходит в жидкости — в твердую фазу это тепло поступает благодаря теплообмену. Однако в работе [153] предполагалось условие $T_1 = T_2 = T$, при этом уравнение энергии для всей среды в целом, как видно из выражений (4.43), получается правильным.

§ 5. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим упрощенную систему уравнений, описывающих распространение в среде слабых возмущений. Для таких движений можно ограничиться первыми членами разложения выражений (4.32) и (4.39), т. е. принять, что плотности твердой фазы и жидкости изменяются по линейному закону

$$\frac{\rho_1-\rho_1^0}{\rho_1^0}=-\frac{\beta_1}{3}(\theta-\theta_0)-\alpha_1(T_1-T_0),\quad \frac{\rho_2-\rho_2^0}{\rho_2^0}=$$

$$=\beta_2(p-p_0)-\alpha_2(T_2-T_0). \qquad (5.1)$$

Здесь и в последующем значком «нуль» отмечены значения параметров, например, первого инварианта тензора истинных напряжений $\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$, соответствующие начальному стационарному состоянию; β_1, β_2 — коэффициенты изотермической сжимаемости; α_1, α_2 — коэффициенты объемного расширения твердой фазы и жидкости.

Так как значения коэффициентов β_1, β_2 относительно мало меняются с температурой (для горных пород и однородных капельных жидкостей), то соответствующей зависимостью будем для простоты пренебрегать.

Подставим соотношение (5.1) в уравнение неразрывности (3.19) и воспользуемся соотношением $\theta = -3p + \theta^f/(1 - m)$, следующим из выражения (3.28), где θ^f — первый инвариант тензора фиктивных напряжений

$$\beta_1\rho_1^0\frac{\partial(1-m)(p-p_0)}{\partial t}-\alpha_1\rho_1^0\frac{(1-m)(T-T_0)}{\partial t}-\rho_1^0\left(1-\frac{\beta_1\theta^f}{3(1-m)}\right)\frac{\partial m}{\partial t}-$$

$$-\frac{\beta_1}{3}\rho_1^0\frac{\partial\theta^f}{\partial t}+\frac{\partial(1-m)\rho_1 u_i}{\partial x_i}=0. \qquad (5.2)$$

Ограничимся теперь рассмотрением малых отклонений параметров пористой среды от их значений, соответствующих стационарному состоянию, т. е. положим

$$m = m_0 + m', \quad u_i = u_i^0 + u_i', \quad w_i = w_i^0 + w_i',$$
$$p = p_0 + p', \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{ij}', \quad a = a_0 + a',$$

где u_i^0, w_i^0 — одного порядка или же еще более малые величины по сравнению с u_i', w_i'; $m_0 \gg m'$, $a_0 \gg a'$ и т. д. Указанное предположение о величинах u_i^0, w_i^0 позволяет принимать за стационарное состояние не только полный покой среды, но и медленное, например, фильтрационное установившееся движение.

Теперь будем в уравнениях движения и неразрывности фаз пренебрегать величинами второго порядка малости, а в уравнении (5.2) величиной $\beta_1\theta_0^f/3$ $(1 - m_0)$, малой по сравнению с единицей, например, для естественных грунтов и горных пород коэффициент β_1 имеет порядок $5 \cdot 10^{-6}$ am^{-1} (для кварца), а максимум величины $\theta_0^f = 5 \cdot 10^3$ am. Тогда система [1] тем самым линеаризованных уравнений движения и неразрывности будет иметь вид

$$(1-m_0)\left(\rho_1^0 \frac{\partial u_i}{\partial t} - \rho_2^0 \frac{\partial w_i}{\partial t}\right) - \frac{\partial \sigma_{il}^f}{\partial X_j} - \frac{\mu_0}{a_0} m_0 (1-m_0)(w_i - u_i) +$$
$$+ \left(m_0(\rho_1^0 - \rho_2^0) - (1-m_0)(\rho_1 - \rho_2)\right) g_i = 0, \tag{5.I}$$

$$\rho_2^0 \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\mu}{a_0} m_0 (1-m_0)(w_i - u_i) + \rho_2 g_i = 0, \tag{5.II}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\beta_1}{3}\frac{\partial \theta^f}{\partial t} - \beta_1 (1-m_0)\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_1 (1-m_0)\frac{\partial T_1}{\partial t} -$$
$$- (1-m_0)\frac{\partial u_i}{\partial X_i} = 0, \tag{5.III}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \beta_2 m_0 \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_2 m_0 \frac{\partial T_2}{\partial t} + m_0 \frac{\partial w_i}{\partial X_i} = 0, \tag{5.IV}$$

где теперь переменными величинами являются отклонения от стационарных значений, причем для простоты штрихи опущены.

Уравнения сохранения энергии в линейном приближении можно получить из второго закона термодинамики для фаз (4.16), (4.17), если согласно уравнениям (4.29) и (4.37) воспользоваться справедливыми в линейном приближении известными термодинамическими соотношениями

$$\rho_2 T_2 \frac{\partial s_2}{\partial t} = c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \alpha_2 T_0 \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{5.3}$$

$$\rho_1 T_1 \frac{\partial s_1}{\partial t} = c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} + \alpha_1 T_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \tag{5.4}$$

[1] Система основных уравнений обозначена римскими цифрами.

где α_1, α_2 — коэффициенты объемного расширения; c_1, c_2 — коэффициенты теплоемкости (при постоянном давлении) твердой и жидкой фаз, рассчитанные на единицу объема; $\sigma = \theta/3$.

Если пренебречь в уравнении (4.16) членом второго порядка малости $R_i\,(w_i - u_i)$ и подставить в (4.16) и (4.17) выражения (5.3), (5.4), то уравнения сохранения энергии (притока тепла) примут вид

$$(1-m_0)\,c_1\frac{\partial T_1}{\partial t} = (1-m_0)\,D_1\nabla^2 T_1 - (1-m_0)\,\alpha_1 T_0\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varkappa\,(T_2 - T_1), \tag{5.V}$$

$$m_0 c_2\frac{\partial T_2}{\partial t} = m_0 D_2\nabla^2 T_2 + m_0\alpha_2 T_0\frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa\,(T_2 - T_1). \tag{5.VI}$$

Для замыкания системы уравнений (5.I)—(5.VI) нужно связать напряжения σ^f_{ij} и давление p со смещениями (или деформациями) скелета среды. Деформации скелета пористой среды e_{ij} при малых смещениях определяются в эйлеровых координатах соотношением

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial l_i}{\partial x_j} + \frac{\partial l_j}{\partial x_i}\right), \quad u_i = \frac{\partial l_i}{\partial t}. \tag{5.5}$$

Выше было принято предположение, что изменения плотности материала твердой фазы определяются по изменениям среднего нормального напряжения $\theta/3$ согласно законам, выполняющимся в сплошном материале. Воспользуемся этим для расшифровки связи деформация — напряжения, приняв, что полную деформацию можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$e_{ij} = e^{\Delta}_{ij} + e^{\circ}_{ij}. \tag{5.6}$$

Деформации e°_{ij} связаны с изменениями плотности твердой фазы, а деформации e^{Δ}_{ij} определяются фиктивными напряжениями σ^f_{ij}. Величину e°_{ij} можно представить в виде

$$e^{\circ}_{ij} = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_1^0}{\rho_1} - 1\right)\delta_{ij} = -\frac{\beta_1}{3}\,\sigma - \frac{\alpha_1}{3}\,T_1, \tag{5.7}$$

а малые деформации e^{Δ}_{ij} (как и в обычной упругости) можно связать законом Гука с фиктивными напряжениями

$$\sigma^f_{ij} = (1-m_0)\,(\lambda_1^* e^{\Delta}\delta_{ij} + 2\lambda_2^* e^{\Delta}_{ij}), \quad e^{\Delta} = e^{\Delta}_{11} + e^{\Delta}_{22} + e^{\Delta}_{33}. \tag{5.8}$$

Параметры λ_1^*, λ_2^* характеризуют *переупаковку* твердых частиц и являются функциями начального стационарного состояния. В самом деле, в частном случае среды с несжимаемыми фазами ($\rho_1 = \mathrm{const}$, $\rho_2 = \mathrm{const}$ или $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) ненулевыми оказываются лишь деформации $e^{\Delta}_{ij} \equiv e_{ij}$. Тогда из уравнений неразрывности (5.III) и (5.IV) следует, что $\partial e/\partial t = -(m_0/(1-m_0))\,\mathrm{div}\,\vec{w}$, т. е. объемные деформации скелета среды возможны лишь при уходе жидкости из среды, при возникновении более (или менее) плотной укладки твердых частиц.

Суммируя согласно формуле (5.6) выражения (5.7)—(5.8), получим

$$\sigma_{ij}^{f} = (1 - m_0)\,(\lambda_1^* e\delta_{ij} + 2\lambda_2^* e_{ij} + \beta_1 K^* \sigma\delta_{ij} - \alpha_1 K^* T_1 \delta_{ij}). \qquad (5.9)$$

Однако простому измерению доступны не константа λ_1^*, а следовательно, и не константа $K^* = \lambda_1^* + (2/3)\,\lambda_2^*$, а те величины, которые характеризуют сухую пористую среду, где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{f}$, $p = 0$. В связи с этим введем измеримый модуль всестороннего сжатия сухой пористой среды $(1 - m_0)\,K = (1 - m_0)\,K^*/(1 + \beta_1 K^*)$ и запишем уравнение (5.9) в виде

$$\sigma_{ij}^{f} = (1 - m_0)\,(\lambda_1 e\delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij} + \beta_1 K p\delta_{ij} - \alpha_1 K T_1 \delta_{ij}), \qquad (5.\text{VII})$$

где $(1 - m_0)\,\lambda_1$, $(1 - m_0)\,\lambda_2$ — первый и второй коэффициенты Ламе сухой пористой среды ($\lambda_2 \equiv \lambda_2^*$).

Соотношение (5.VII) можно получить из соотношений Гиббса (4.29) и (4.30) в линейном приближении в условиях термического равновесия, предполагая (для оценки величин коэффициентов в линейных связях), что при равенстве фазовых напряжений каждая из фаз деформируется так, как если бы все пространство было занято только ею, а при поровом давлении, равном нулю, коэффициенты упругих связей соответствуют однофазной твердой среде, но при таком же ее распределении по пространству, как и в присутствии жидкой фазы. Соответствующие выкладки проведены в работе [80].

Теперь приведем предложенную Брутсаертом [265] систему *линеаризованных уравнений движения неполностью насыщенной* пористой среды, являющейся по существу трехфазной средой (твердые частицы + капельная жидкость + газ). Уравнения движения твердой, жидкой и газовой фаз имеют вид

$$\begin{aligned}
m_1^0 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \rho_1 m_1^0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + r_{sg}\,(v_i - u_i) + r_{sl}\,(w_i - u_i),\\
m_2^0 \frac{\partial p_2}{\partial x_i} &= \rho_2 m_2^0 \frac{\partial w_i}{\partial t} - r_{sl}\,(w_i - u_i) + r_{lg}\,(w_i - v_i),\\
m_3^0 \frac{\partial p_3}{\partial x_1} &= \rho_3 m_3^0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - r_{sg}\,(v_i - u_i) - r_{lg}\,(w_i - v_i)
\end{aligned} \qquad (5.10)$$

и дополняются уравнениями неразрывности и тремя линейными соотношениями, обобщающими для трехфазной среды соотношения (5.16):

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= (1 - m_0)\,(\lambda_1 e\delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}) + (C_{sg} e^{(3)} + C_{sl} e^{(2)}),\\
p_2 &= C_{sl} e + C_l e^{(2)} + C_{gl} e^{(3)},\\
p_3 &= C_{sg} e + C_{gl} e^{(2)} + C_g e^{(3)},
\end{aligned} \qquad (5.11)$$

где p_2, p_3 — давления; $e^{(2)}$, $e^{(3)}$ — деформации жидкости и газа; m_i^0 — объемные фазовые концентрации ($m_2^0 + m_3^0 = m_0$ — пори-

стость среды); C_{sg}, C_{sl} — упругие коэффициенты; r_{sg}, r_{sl} — коэффициенты межфазового взаимодействия.

Подчеркнем, что Брутсаерт [265] не выписывает уравнений энергии (см. § 4), хотя и указывает существенность для этого случая температурных эффектов. Далее, Брутсаерт принимает, что каждая пора занята либо газом, либо жидкостью, в связи с чем полагает $r_{lg} = 0$. Если это так, то коэффициенты r_{sg}, r_{sl} нетрудно интерпретировать через фазовые проницаемости $f_3(S)$, $f_2(S)$

$$r_{sg} = (m_3^0)^2 \frac{\mu_3}{k_0 f_3(S)}, \quad r_{sl} = (m_2^0)^2 \frac{\mu_2}{k_0 f_2(S)}, \tag{5.12}$$

где $S = m_2/m$ — насыщенность порового пространства жидкой фазой; μ_2, μ_3 — вязкости жидкости и газа.

В задачах динамики малых возмущений естественно линеаризовать связи (5.12), полагая в этих коэффициентах $S = S_0 = m_2^0/m_0 = \text{const}$.

Давления p_2 и p_3 связаны между собой известным соотношением $p_2 - p_3 = p_c(S)$, где $p_c(S)$ — капиллярное давление (см. рис. 22, часть II), причем суммарное давление распределено между фазами по следующему правилу: $\Gamma_{ij} = m_1^0 \sigma_{ij} - (m_2^0 p_2 + m_3^0 p_3)$ — см. [165], а также § 21.

Много исследований было посвящено проблеме вычисления упругих констант пористой (сухой и насыщенной) среды, причем использовалось понятие *зернистой* среды. При этом авторы пытались свести проблему к вычислению элементарного взаимодействия, происходящего на контактах упругих шаров. Подробный обзор работ этого направления был выполнен Дересевичем [59]. Будем пользоваться, однако, экспериментально определяемыми значениями упругих коэффициентов.

Подчеркнем следующий, фундаментальный для анализа поведения грунтов и горных пород факт.

Соотношение $\beta_1 K \sim \varepsilon$ *является механической характеристикой горной породы — критерием степени уплотнения грунта или степени сцементированности горной породы* [167].

В самом деле, указанное соотношение имеет простой физический смысл, поскольку β_1 — сжимаемость материала твердой частицы; K^{-1} — эффективная сжимаемость всего конгломерата твердых частиц (скелета среды) в целом.

Будем называть пористую среду *мягкой*, если $\varepsilon \ll 1$. Чем ближе ε к единице, тем труднее переупаковываются частицы, тем жестче они связаны друг с другом. Пористую среду, у которой $\beta_1 K(1 - m) = 1$, назовем *идеально сцементированной* пористой средой [168].

Примером мягких сред являются слабо сцементированные пески, грунты, залегающие на поверхности. В самом деле, они сложены из крупинок твердых минералов, в основном кварца, у которого $\beta_1 \approx 10^{-5}\ 1/am$, тогда как у грунтов порядок величин K оценивается в 100—1000 *am* [48].

В более сцементированных (глубинных) горных породах соотношение $\beta_1 K$ несколько больше, но обычно не выше 0,5. Приведем в связи с этим результаты экспериментальных исследований Фатта [286] деформаций одного из типов естественного нефтеносного песчаника (пористость 0,26, проницаемость $k_0 = 800$ *мд*). В этих опытах, в частности, определялся параметр α_*, который, как нетрудно показать [1], связан с m_0 и $K\beta_1$ следующим образом

$$K\beta_1 = 1 - \frac{\alpha_* - m_0}{1 - m_0}. \tag{5.13}$$

Фаттом было найдено, что в зависимости от фиктивного давления $\sigma^f = -\theta^f/3$, которое интерпретируется (см. § 18) как разность между горным давлением и давлением жидкости в пласте, безразмерный параметр α_* принимал значения в интервале от 0,92 до 0,72. Начальная пористость песчаника m_0 была 0,26. По формуле (4.1) нетрудно проверить, что это соответствует изменению параметра $K\beta_1$ от 0,11 до 0,38. Зависимость α_* и $\beta_1 K$ от σ^f по Фатту [286] приведена в табл. 1. В отличие от работы [286] давление σ^f дано здесь в атмосферах.

Таблица 1

σ^f, *atm*	α_*	$\beta_1 K$	H, *км*
70	0,92	0,11	0,56
351	0,85	0,20	2,76
703	0,82	0,24	5,5
980	0,72	0,38	7,7

В таблице приведены значения эффективных глубин H пласта, которым соответствует σ^f, если H определяется по формуле

$$H = \frac{\sigma^f}{g(\rho - \rho_2)}, \tag{5.14}$$

причем средняя плотность горных пород ρ в расчетах принималась равной 2,3 *г/см*^{3}, а плотность жидкости $\rho_2 = 1$ *г/см*^{3}.

Воспользовавшись методом инспекционного анализа, рассмотрим несколько подробнее систему уравнений динамики упругих насыщенных *мягких* пористых сред в изотермических условиях.

Введем систему безразмерных переменных $\bar{\sigma}^f_{ij}$, $\bar{p}$, $\bar{t}$, $\bar{u}_i$, $\bar{w}_i$, $\bar{x}_i$, $\bar{e}_{ij}$, связанную со старыми переменными следующими зависимостями:

$$\sigma^f_{ij} = F_{ij}\bar{\sigma}^f_{ij},\ p = \bar{P}\bar{p},\ t = T\bar{t},\ u_i = U_i\bar{u}_i,\ w_i = W_i\bar{w}_i \tag{5.15}$$

$$X_i = L_i\bar{X}_i,\ e_{ij} = E_{ij}\bar{e}_{ij},$$

где F_{ij}, P, ... — их характерные значения. Величины $\bar{\sigma}^f_{ij}$, $\bar{p}$ имеют порядок единицы.

[1] Фатт пользовался системой упругих коэффициентов Био [259] — см. § 6.

Прежде всего предположим, что рассматриваются также области движения грунта, где характерные масштабы длин и скоростей по разным осям координат сопоставимы, т. е.

$$L_i \sim L_j \sim L,\ U_i \sim U_j \sim U,\ W_i \sim W_j \sim W. \tag{5.16}$$

Если предположения (5.16) неоправданы, то двумерное или трехмерное движение грунта можно попытаться свести соответственно к квазиодномерной или квазидвумерной задаче.

При исключении локальной производной от пористости из уравнений неразрывности фаз (5.III) и (5.IV) следует уравнение сплошности двухфазной среды, которое в пренебрежении ε-малым слагаемым в первом из коэффициентов принимает вид

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + (1-m_0)\frac{\partial u_i}{\partial X_i} + m_0 \frac{\partial w_i}{\partial X_i} = 0, \tag{5.17}$$

где

$$\beta = \beta_1 (1-m_0) + \beta_2 m_0,\ \varepsilon = \beta_1 / B, \tag{5.18}$$

$$B = (\lambda_1 + 2\lambda_2)^{-1} \sim K^{-1}. \tag{5.19}$$

Из уравнений неразрывности фаз (5.III) и (5.IV) сразу видно, что для мягких грунтов $W \sim U$, если $\beta_1 (1 - m_0) \sim \beta_2 m_0$.

Система уравнений движения, сплошности и обобщенный закон Гука в безразмерном виде запишутся в виде

$$(1-m_0) U \left(\rho_1 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} - \rho_2 \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{t}}\right) - \frac{F_{ij} T}{L} \frac{\partial \bar{\sigma}^f_{ij}}{\partial \bar{X}_i} -$$

$$- m_0 (1-m_0) \frac{\mu T U}{a_0} (\bar{w}_i - \bar{u}_i) = 0,$$

$$\rho_2 u \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{t}_i} + \frac{PT}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{X}_i} + m_0 (1-m_0) \frac{\mu T U}{a_0} (\bar{w}_i - \bar{u}_i) = 0, \tag{5.20}$$

$$\beta P \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + (1-m_0) \frac{UT}{L} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{X}_i} + m_0 \frac{WT}{L} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{X}_i} = 0, \tag{5.21}$$

$$\frac{1}{m_0} \bar{\sigma}^f_{ij} - \varepsilon \frac{P}{F_{ij}} \frac{\beta_1}{\beta} K B \bar{p} \beta_{ij} = \frac{\lambda_1}{F_{ij}} \frac{UT}{L} \bar{e} \delta_{ij} + 2 \frac{\lambda_2}{F_{ij}} E_{ij} \bar{e}_{ij}. \tag{5.22}$$

Прежде всего отметим, что характерная величина максимума касательных напряжений (F_{ij} при $i \neq j$) не превосходит порядка максимума нормальных компонент фиктивных напряжений в скелете среды. Это непосредственно следует из тензорного характера напряжений в сплошной среде.

а. Рассмотрим теперь такие области движения грунта (U_a, T_a, L_a), в которых $F^a_{ij} \sim \varepsilon P_a \delta_{ij}$. Нетрудно видеть, что для описания

изменения параметров движения в этой области можно пренебречь фиктивными напряжениями в первом из уравнений (5.20), т. е. система уравнений (5.20)—(5.22) оказывается замкнутой и имеет вид

$$(1-m_0)\left(\rho_1\frac{\partial u_i}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t}\right)=\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)(w_1-u_i),$$

$$\rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial X_i}+\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)(w_i-u_i)=0, \qquad (5.23)$$

$$\beta\frac{\partial p}{\partial t}+(1-m_0)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+m_0\frac{\partial w_i}{\partial X_i}=0.$$

В самом деле, здесь в законе Гука (5.22) следует сохранить оба слагаемых в левой части. Из выражения (5.22), определяющего объёмные деформации через напряженное состояние, следует соотношение

$$\frac{1}{F^a_{ll}B}\frac{U_aT_a}{L_a}\sim 1\sim\frac{\varepsilon P_a}{F^a_{ll}}, \quad i=j, \quad \lambda_1\sim\lambda_2\sim B^{-1},$$

$$\frac{U_a}{L_a}T_a\sim\beta P_a, \quad F^a_{ij}\sim\frac{U_a}{L_a}T_a\lambda_1, \quad i=j. \qquad (5.24)$$

В уравнении сплошности поэтому все три слагаемых имеют один порядок

$$W_a\sim U_a\sim\beta P_aL_a/T_a, \qquad (5.25)$$

а уравнение движения жидкости можно представить в виде

$$\frac{L_a}{T_a}\beta P_a\rho_2\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial\bar{t}}-\frac{P_aT_a}{L_a}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}_i}+\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)P_aL_a(w_i-u_i)=0. \qquad (5.26)$$

Отсюда видно, что $T_a/L_a\sim\sqrt{\rho_2\beta}$, т. е. порядок скорости распространения давления в жидкости определяется сжимаемостью фаз, а не параметрами λ_1, λ_2.

Уравнение движения твердой фазы имеет вид

$$(1-m_0)\left(\rho_1\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{t}}-\rho_2\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial\bar{t}}\right)-\frac{F^a_{ij}}{\beta P_a}\frac{T_a^2}{L_a^2}-\frac{\partial\bar{\sigma}f_{ij}}{\partial\bar{X}_j}-$$

$$-\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)T_a(w_i-u_i)=0. \qquad (5.27)$$

Но так как $F^a_{ij}\sim\varepsilon P_a$ (и при $i=j$ и при $i\neq j$), а $T_a/L_a\sim\sqrt{\rho_2\beta}$, то получим следующую оценку для коэффициентов при производных от напряжений в уравнении (15.27)

$$\frac{F^a_{ij}}{\beta P_a}\frac{T_a^2}{L_a^2}\sim B\frac{F^a_{ij}}{\beta P_a}\rho_2\frac{\beta}{B}\sim\varepsilon\rho_2 \qquad (5.28)$$

и поэтому действительно соответствующими членами в уравнении (5.27) по сравнению с инерционными можно пренебречь.

Нетрудно показать, что система уравнений (5.23) сводится к следующему релаксационному волновому уравнению относительно давления:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-v_\infty^2\nabla^2 p\right)+\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-v_0^2\nabla^2 p\right)=0, \tag{5.29}$$

$$v_\infty^2=\frac{1}{\rho_\infty\beta},\quad v_0^2=\frac{1}{\rho_0\beta},\quad \frac{1}{\rho_\infty}=\frac{1-m_0}{\rho_1}+\frac{m_0}{\rho_2},\quad \tau=\frac{a_0\rho_1\rho_2}{\mu m_0\rho_0},$$

здесь τ — характерное время релаксации; $\rho_0=(1-m_0)\,\rho_1+m_0\rho_2$.

Условие $F_{ij}^a\sim\varepsilon P_a$, определяющее область возможного применения уравнения (5.29), показывает, что фазовые давления с точностью до величины порядка ε равны между собой.

Выше были упомянуты уравнения Х. А. Рахматулина (3.26), в которых предлагалось считать фазовые давления тождественно равными друг другу. Уравнения (3.26) после линеаризации в отсутствие сил тяжести эквивалентны, как нетрудно показать, системе (5.23) или релаксационному уравнению (5.29). Таким образом, система уравнений Х. А. Рахматулина применима для расчетов динамики водонасыщенного мягкого грунта по крайней мере в акустическом приближении, причем в этом случае она дает результаты, отличающиеся от результатов модели (5.I)—(5.VII) на величины ε-малого порядка.

Теперь покажем, что иногда во всем грунте реализуется такое движение, при котором справедлива оценка $\varepsilon P/F_{ij}\sim 1$.

В самом деле, рассмотрим, например, замкнутую область грунта, на всей границе которой задается равенство скоростей смещения фаз. Тогда из уравнения (5.III)—(5.IV) имеем

$$\frac{UT}{L}\,\frac{1-m_0}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S}\bar{u}_i n_i\,dS+\frac{WT}{L}\,\frac{m_0}{\Delta V}\int\limits_{\Delta S}\bar{w}_i n_i\,dS\sim\beta P, \tag{5.30}$$

где n — компонента единичной нормали к элементу граничной поверхности S области объема V грунта.

Если на всей границе $u_i=w_i$ (сжатие всюду осуществляется жестким непроницаемым поршнем), то уравнение (5.30) записывается в виде

$$\frac{1}{V}\int\limits_S u_i n_i\,dS=\frac{UT}{L}\,\frac{1}{V}\int\limits_S\bar{u}_i n_i\,dS\sim\beta P, \tag{5.31}$$

что и дает оценку $(UT/L)\sim\beta P$. Отсюда при отсутствии оттока жидкости в силу условия $\bar{\sigma}_{ij}^f\sim 1$ всюду в системе справедлива оценка

$$\frac{\lambda_1}{F_{ij}}\,\frac{UT}{L}\sim\varepsilon\,\frac{P}{F_{ij}}\sim 1. \tag{5.32}$$

Этот результат подтверждается ниже примером задачи о приложении нагрузки (при одномерном движении) со стороны непроницаемого и жидкого поршня (см. § 13).

б. Рассмотрим теперь области движения, где $\varepsilon P_b \ll F^b_{ij}$ при $i = j$, т. е. где сопоставимы изменения нормальных эффективных напряжений F^b_{ij} $(i = j) \sim P$ и давления P. Здесь уравнение (5.20) и уравнение сплошности (5.18) можно записать в виде

$$\bar{\sigma}^f_{ij} = (1 - m_0)\left(\frac{\lambda_1}{F^b_{ij}}\frac{U_b T_b}{L_b}\bar{e}\delta_{ij} + 2\frac{\lambda_2}{F^b_{ij}}\bar{e}_{ij}\right) + 0\left(\varepsilon\frac{P_b}{F^b_{ij}}\right), \quad i = j \quad (5.33)$$

$$\frac{\lambda_1}{F^b_{ij}}\frac{U_b T_b}{L_b}(1 - m_0)\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial\bar{X}_i} + \frac{\lambda_1}{F^b_{ij}}\frac{W_b T_b}{L_b}\; m_0\;\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial\bar{X}_i} + 0\left(\varepsilon\frac{P_b}{F^b_{ij}}\right) = 0. \quad (5.34)$$

Поскольку левая часть уравнения (5.33) имеет порядок единицы, то и одно из слагаемых в правой части также должно иметь порядок единицы. Поэтому в рассматриваемой области движения справедлива следующая оценка:

$$\frac{U_b T_b}{L_b}\frac{\lambda_1}{F_{ij}} \sim 1, \quad \frac{U_b T_b}{L_b} \sim \frac{F^b_{ij}}{\lambda_1} \gg P_b\beta. \quad (5.35)$$

Отсюда в соотношениях (5.1)—(5.2) можно пренебречь выделенными малыми членами, и движение в области $(\varepsilon P_b/F^b_{ij}) \ll 1$ описывается системой уравнений, получающейся из (5.I)—(5.IV), (5.VII) в пренебрежении сжимаемостью фаз

$$(1 - m_0)\left(\rho_1\frac{\partial u_i}{\partial t} - \rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t}\right) - \frac{\partial\sigma^f_{ij}}{\partial X_j} - \frac{\mu}{a_0}m_0(1 - m_0)(w_i - u_i) = 0,$$

$$\rho_2\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\mu}{a_0}m_0(1 - m_0)(w_i - u_i) = 0, \quad (5.36)$$

$$(1 - m_0)\frac{\partial u_i}{\partial X_i} + m_0\frac{\partial w_i}{\partial X_i} = 0,$$

$$\sigma^f_{ij} = (1 - m_0)(\lambda_1 e\delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}).$$

Определим теперь скорости распространения объемных деформаций поперечного сдвига. Система уравнений (5.36) приводит к следующему уравнению для объемной деформации:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{1}{B\rho}\nabla^2 e + \frac{\mu}{a_0 m_0 \rho}\frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad \rho = \rho_1 + \frac{1 - m_0}{m_0}\rho_2, \quad (5.37)$$

согласно которому скорость распространения возмущений объемных деформаций равна $c = 1/\sqrt{B\rho}$.

Применение операции rot к уравнениям движения твердой и жидкой фаз приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi_k}{\partial t^2} - \frac{\lambda_2}{\rho_1}\nabla^2\psi_k\right) + \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial^2\psi_k}{\partial t^2} - \frac{\lambda_2(1 - m_0)}{\rho_0}\nabla^2\psi_k\right) = 0, \quad (5.38)$$

где $2\psi_k = \{(\partial l_i/\partial X_j) - (\partial l_j/\partial X_i)\}\in_{ijk}$ — компонента вихря вращения; $\in_{ijk}$ — аксиальный тензор Леви — Чивита [196].

Согласно уравнению (5.29) фронт области $F^a_{ij} \sim \varepsilon P_a$ распространяется со скоростью v_∞, а так как в силу условия $\varepsilon \ll 1$ имеем $v_\infty \gg c$ и $v_\infty \gg v_{s\infty} = \sqrt{\lambda_2/\rho_1}$, то этот фронт распространяется по невозмущенному материалу.

Так как в начальный момент времени фронт обеих волн совпадал с участком границы среды, на которой была приложена, по предположению, остающаяся при $t \gg 0$ неизменной нагрузка, то характерные изменения на первой волне таковы:

$$P_a\delta_{ij} \sim (-1)\,F^*_{ij} + P_*\delta_{ij} + 0\,[\varepsilon\,(F^*_{ij} - P_*\delta_{ij})], \tag{5.39}$$

$$F^a_{ij} \sim 0\,(\varepsilon F^*_{ij} - \varepsilon P_*\delta_{ij}),$$

где звездочкой обозначены задаваемые возмущения на границе.

Плотность твердой фазы ρ_1 имеет один порядок с величиной ρ, а поэтому соотношение между скоростями продольной волны c и волны чистого сдвига $v_{s\infty}$ такое же, как и в обычной упругой среде (выше уже использовалось предположение, что $c \sim v_{s\infty}$, которое фактически и обозначает, что $\lambda_2 \sim B^{-1}$). За фронтом эквиволюминальной волны искажения, распространяющиеся со скоростью v_s, будут происходить деформации чистого сдвига, а за фронтом второй продольной волны, скорость которого v_b, происходят и объемные и сдвиговые деформации. Для всех этих деформаций характерно условие $\varepsilon P_b \ll F^b_{ij}$, а поэтому им соответствуют следующие характерные изменения напряженного состояния:

$$P_b\delta_{ij} \sim F^*_{ij} - 0\,[\varepsilon\,(F^*_{ij} - P_*\delta_{ij})], \quad F^b_{ij} \sim F^*_{ij} - 0\,[\varepsilon\,(F^*_{ij} - P_*\delta_{ij})]. \tag{5.40}$$

Здесь учитывается тот факт, что возмущения P_b, F^b_{ij}, вносимые второй продольной волной и эквиволюмиальной волной сдвига, отсчитываются уже не от состояния покоя, а от возмущений первой волны, т. е. за второй волной установятся следующие характерные давления и напряжения $P_a + P_b \sim P_*$; $F^a_{ij} + F^b_{ij} \sim F^*_{ij}$, согласующиеся с граничными условиями. Из соотношения (5.40), в частности, следует, что при приложении к насыщенному мягкому грунту нагрузки со стороны жидкости ($F^*_{ij} = 0$) изменения напряженного состояния на второй волне имеют порядок ε-малых величин. Поэтому они не могут быть найдены путем решения системы уравнений (5.36), в которой пренебрегается ε-малыми величинами, и чтобы их определить, необходимо решать полную систему уравнений (5.I)—(5.IV), (5.VII). В то же время на первой волне изменения давления будут конечными и для их подсчета, как и при деформации грунта без оттока, можно пользоваться уравнением (5.29). В этих двух случаях характер изменений давления и фиктивных напряжений весьма близок.

Рассмотрим теперь характерные величины смещений твердых частиц l^a_i и l^b_i в фиксированной точке грунта после прохождения соответственно первой и второй волн. Прежде всего заметим, что

$l_i^a \sim U^a T^a$, $l_i^b \sim U^b T^b$. Согласно соотношениям (5.24) и (5.35) имеем

$$l_i^a \sim \frac{F_{ij}^a}{\lambda_1} L_i \sim \beta P^a L_i, \quad l_i^b \sim \frac{F_{ij}^b}{\lambda_1} L_i \gg \beta P^b L_i.$$

Отсюда получаем

$$\frac{l_i^a}{l_i^b} \sim \frac{F_{ij}^a}{F_{ij}^b} \sim \frac{0\left(\varepsilon\left(F_{ij}^* - P_* \delta_{ij}\right)\right)}{F_{ij}^* + 0\left(\varepsilon\left(F_{ij}^* - P_* \delta_{ij}\right)\right)}, \tag{5.41}$$

т. е. l_i^a пренебрежимо мало по сравнению с l_i^b, если только граничные условия не таковы, чтобы $F_{ij}^* \sim \varepsilon P_* \delta_{ij}$ или $w_i = u_i$ на S — см. уравнения (5.31)—(5.32).

§ 6. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Впервые механизм деформации упругих насыщенных жидкостью пористых сред был рассмотрен, по-видимому, в работах К. Терцаги [206], где изучалась задача об одномерном плоском сжатии водонасыщенного грунта. Исходя из опытных данных, Терцаги показал, что если жидкость может уходить из образца грунта, то деформации его скелета вызываются «эффективным давлением» σ^f, связанным с суммарным давлением Γ следующим соотношением: $\sigma^f = \Gamma - p$. Если же жидкость не может уходить из грунта, то $\Gamma = p$, $\sigma^f = 0$ и деформации скелета пренебрежимо малы по сравнению с деформациями в первом случае. Из равенства можно видеть, что «эффективному давлению» σ^f по Терцаги соответствуют фиктивные напряжения σ_{ij}^f, и если в обобщенном законе Гука (5.VII) пренебречь сжимаемостью материала твердых частиц (т. е. положить $\beta_1 = 0$), то, как и в работах Терцаги, деформации e_{ij} окажутся связанными с фиктивными напряжениями.

Возможность предположения $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ (т. е. $\beta_1 = \beta_2 = 0$) была четко сформулирована в работах Н. М. Герсеванова [46, 47] и названа им «принципом несжимаемости грунтовой массы». Кроме того, Н. М. Герсеванов показал, что в условиях деформируемого грунта сила фильтрационного сопротивления пропорциональна разности истинных скоростей движения фаз.

Позднее в книге Н. М. Герсеванова и Д. Е. Польшина [47] была выписана система уравнений, названная «общими уравнениями консолидации грунта в состоянии грунтовой массы». В эту систему входили уравнения сплошности фаз — и твердой и жидкой, — но в предположении о несжимаемости материала твердых частиц и жидкости, а также соотношениетипа закона Гука между фиктивными напряжениями и деформациями (аналогичные связи (5.V), но при $\beta_1 = 0$), причем перед введением этих связей система уравнений предварительно не линеаризовалась. В системе Н. М. Герсеванова — Д. Е. Польшина не вводилось понятие суммарных напряжений Γ_{ij} и не выписывалось уравнение неразрывности импульса для всей пористой среды, а уравнения движения выписывались сразу для каждой из фаз в отдельности и имели в принятых здесь обозначениях следующий вид:

$$\rho_2 m \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_i}{\partial X_j}\right) + \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\mu m}{k}(w_i - u_i) - \rho_2 g_i = 0, \tag{6.1}$$

$$\rho_1 (1-m)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) - \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial X_j} - \frac{\mu m}{k}(w_i - u_i) - (1-m)(\rho_1 - \rho_2) g_i = 0. \tag{6.2}$$

Хотя уравнения (6.1)—(6.2) и дают в сумме уравнение неразрывности импульса (3.22), но в отдельности они не совпадают с уравнениями (3.23) и (3.29).

Для того чтобы убедиться, что уравнение неразрывности импульса для жидкости надо записывать именно в виде (3.23), а не так, как (6.1), достаточно рассмотреть хотя бы частный случай стационарного одномерного движения идеальной жидкости ($\mu = 0$) в жесткой среде переменной пористости: $m = m(X)$. Тогда уравнение (3.23) приводит к правильному виду уравнение Бернулли для струйки жидкости: $\rho_2 q^2/(2m^2) + p + \rho_2 gz = \text{const}$, где $q = wm$ — расход жидкости; z — высота над уровнем отсчета. В то же время из уравнения (6.1) следует неверное соотношение $\rho_2 q^2/(2m) + p + \rho_2 gz = \text{const}$.

Таким образом, в рамках упрощающего предположения о «несжимаемости грунтовой массы» единственное расхождение системы Н. М. Герсеванова — Д. Е. Польшина с выписанной выше системой заключается в учете инерционных сил.

Уравнение движения жидкости с инерционными членами весьма часто рассматривалось в теории фильтрации. При этом иногда (см., например, [131]) оно записывалось в виде

$$\rho_2 \frac{\partial m w_i}{\partial t} + \rho_2 m w_j \frac{\partial w_i m}{\partial X_j} = -\frac{\partial p}{\partial X_i} - R_i + \rho_2 g_i, \tag{6.3}$$

что, как легко видеть, неэквивалентно уравнению Н. Е. Жуковского (3.23). Впрочем, поскольку в расчетах по уравнению (6.3) всегда пренебрегалось нелинейными схемами и, как правило, при оценке инерционных сил рассматривалась недеформируемая пористая среда, использование уравнения (6.3) вместо (3.23) не приводило к ошибкам.

Если следовать работе Мокадама [153], то уравнение движения жидкости нужно было бы записывать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2 w_i) + \frac{\partial}{\partial X_j}(-p_{ij} + \rho_2 w_i w_j) + R_i - \rho_2 g_i = 0, \tag{6.4}$$

где $p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, а компоненты τ_{ij} связаны с полем макроскоростей w_i согласно обычной динамике вязкой жидкости [110]. Это соответствует моделированию фильтрующейся жидкости вязкой жидкостью, подверженной действию объемных сил трения. В уравнении (3.23) компонентами пренебрегают по сравнению с объемными вязкими силами и касательными напряжениями в скелете среды. Отметим также различие в учете инерционных сил уравнений (6.4) и (3.23).

Фундаментальная работа Я. И. Френкеля [215] была выполнена в связи с так называемым «сейсмоэлектрическим эффектом» [91] — см. § 12.

Я. И. Френкель при построении предложенной им системы уравнений выписал уравнения движения для каждой из фаз в отдельности: сначала уравнение (3.23) для жидкости (квадратичными членами по скорости пренебрегалось) в эйлеровой системе координат

$$\rho_2 m \frac{\partial w_i}{\partial t} + m \frac{\partial p}{\partial X_i} + \frac{\mu}{\varkappa}(w_i - u_i) = 0, \tag{6.5}$$

а затем уравнение неразрывности импульса для твердой фазы

$$\rho_1 (1-m) \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial X_j} + (1-m) \frac{\partial p}{\partial X_i} - \frac{\mu}{\varkappa}(w_i - u_i) = 0, \tag{6.6}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности.

Уравнение (6.6) Я. И. Френкель интерпретировал как уравнение в лагранжевой системе координат, связанной с частицей твердой фазы. В связи с этим он считал, что в уравнении (6.4) $\rho_1 (1 - m) = \text{const}$, тогда как в выражении (6.3) коэффициент $\rho_2 m$, вообще говоря, переменен. Поэтому для жидкой фазы Я. И. Френкель выписал уравнение неразрывности. Далее, еще до линеаризации Я. И. Френкель выписывает линейную связь (5.V).

Уравнение (6.6), если интерпретировать его как записанное в эйлеровой системе координат, т. е. если добавить члены типа $u_i \partial u_i / \partial X_i$ и отказаться от условия $\rho_1 (1 - m) = \text{const}$, переходит в уравнение (3.25) — здесь $\varkappa = am^{-2} (1 - m)^{-1}$.

Поскольку Я. И. Френкель интерпретировал уравнение (6.6) как записанное в лагранжевой системе координат, он не использовал уравнение сплошности твердой фазы (3.19), и чтобы замкнуть систему, он предложил некоторое соотношение для возмущения пористости

$$m = \frac{1 - m_0 (1 + \alpha_f)}{1 + \alpha_f} (e + \beta_1 p), \tag{6.7}$$

где $\alpha_f = \Delta V_1 / \Delta V_2$ (ΔV_1 — «изменение объема единицы массы твердой фазы»; ΔV_2 — «изменение объема связанных с ней пор»).

Я. И. Френкель отмечает,что параметр определяется «степенью пористости», но не связывает его с упругими константами пористой среды.

Сравним соотношение (6.5) с выражением для α_f, следующим из уравнений (5.III), (5.V)

$$m = (1 - m_0) (1 - \beta_1 K) (e + \beta_1 p). \tag{6.8}$$

Легко видеть, что соотношения (6.5) и (6.6) эквивалентны, если придать коэффициенту α_f следующее значение:

$$\alpha_f = \frac{\beta_1 K (1 - m_0)}{1 - \beta_1 K (1 - m_0)}, \tag{6.9}$$

т. е. α_f имеет порядок $\beta_1 K$ и для мягких горных пород $\alpha_f \ll 1$.

Существовало мнение, что замыкающее соотношение (6.7) следует из определения величины $\alpha_f = \Delta V_1 / \Delta V_2$, если записать его в виде

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial V_2}{\partial t}, \quad V_1 = \frac{1}{\rho_1}, \quad V_2 = \frac{m}{(1 - m) \rho_1}, \tag{6.10}$$

и из уравнения неразрывности для твердой фазы

$$\frac{1}{(1 - m) \rho_1} \frac{\partial (1 - m) \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{u}. \tag{6.11}$$

Проверим справедливость этого утверждения. Прежде всего подчеркнем, что согласно изложенному выше соотношение (6.7) должно быть следствием — см. (6.8)—(6.9) — линеаризованного уравнения неразрывности твердой фазы и обобщенного закона Гука (5.VII). Действительно, характер изменений пористости в рассматриваемой модели является следствием, а не исходным предположением; в этом ее кардинальное отличие от упрощенных теорий механики грунтов и упругого режима фильтрации. Поэтому обсуждаемое здесь утверждение по существу сводится к следующему: соотношение (6.10) заменяет обобщенный закон Гука (5.VIII); только в этом случае соотношение (6.7) будет эквивалентно недостающему в системе Я. И. Френкеля уравнению (5.III) или (6.11).

Поскольку $\rho_1 (1 - m) = (V_1 + V_2)^{-1}$, уравнение (6.11) можно записать в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{V_1 + V_2} \frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial t} = \frac{1}{V_1 + V_2} (1 + \alpha_f) \frac{\partial V_2}{\partial t}. \tag{6.12}$$

Изменение пористости тогда определится соотношением

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_2}{V_1 + V_2} \right) = \frac{1}{V_1 + V_2} \frac{\partial V_2}{\partial t} - \frac{V_2}{V_1 + V_2} \left(\frac{1}{V_1 + V_2} \frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{1}{1 + \alpha_f} \frac{\partial e}{\partial t} - m \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1 - m (1 + \alpha_f)}{1 + \alpha_f} \frac{\partial e}{\partial t}. \tag{6.13}$$

Таким образом, подстановка параметра α_f в уравнение неразрывности для твердой фазы приводит к соотношению (6.7) лишь в частном случае — при $\beta_1=0$. Только ошибочная замена определения скорости объемной деформации в формуле (6.10) на следующее

$$\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_p = \operatorname{div}\vec{u}$$

может привести к совпадению соотношений (6.12) и (6.7) и при $\beta_1 \neq 0$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1-m(1+\alpha_f)}{1+\alpha_f}\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_p = \frac{1-m(1+\alpha_f)}{1+\alpha_f}\left(\frac{\partial e}{\partial t}+\beta_1\frac{\partial p}{\partial t}\right). \quad (6.14)$$

В рассматриваемой общей модели пористость меняется даже при изменениях одного давления в жидкости; это обусловлено неравной сжимаемостью материала фаз и не противоречит упрощенным представлениям механики грунтов, для которых в ряде случаев выполняется «принцип несжимаемости грунтовой массы» (условие $\beta_1 = \beta_2 = 0$).

Л. Я. Косачевский [106] доопределил значение параметра α_f из условия существования упругого потенциала по Био [257], причем оказалось, что это условие совпадает с приведенным здесь условием (6.9) тождественности соотношений (6.7), (6.8).

Цянь Сюэ-сень [224] записал уравнения движения так же, как и Я. И. Френкель, но деформации e_{ij} им связывались не с фиктивным напряжением σ^f_{ij}, а с суммарным Γ_{ij}; в то же время Цянь Сюэ-сень в согласии с принципом несжимаемости грунтовой массы Н. М. Герсеванова считал, что $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ ($\beta_1 = \beta_2 = 0$), т. е. рассматривал случай мягких пород. Однако соотношение (5.V) сводится к связям

$$\Gamma_{ij} = (1-m_0)(\lambda_1 e\delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}), \quad (6.15)$$

использованным Цянь Сюэ-сеном, только в противоположном случае «идеально сцементированных» пористых сред, характеризуемых условием $(1 - m_0)\beta_1 K = 1$. Что касается сред, для которых справедливо условие $\beta_1 = 0$, то еще в работах Терцаги [206] было показано на основе опытных данных, что их деформации e_{ij} вызываются фиктивным напряжением σ^f_{ij}.

В работах Гассманна [288, 289], см. также [99], предлагалось при рассмотрении деформаций насыщенных пористых сред вводить два предельных состояния среды. В первом из них пористая среда является «открытой системой», гидростатическое давление в порах всегда неизменно. Во втором состоянии среда ведет себя как «закрытая» система, относительное движение жидкости исключается. Гассманн вычисляет эффективную сжимаемость «закрытой» системы через обычную сжимаемость материала твердой фазы, модуль сжимаемости жидкости и коэффициент Ламэ «открытой» системы.

Таким образом, фактически Гассманн вводит четыре независимых упругих коэффициента. С другой стороны, автор пользуется представлениями механики зернистой среды [59] и оценивает упругие константы твердой фазы по теории Герца упругого взаимодействия двух контактирующих шаров. При этом интенсивность сдавливания определяется собственным весом массы уложенных друг на друга шаров. Такая схематизация позволила вычислить изменения скорости распространения продольных волн по вертикали и по горизонтали (среда анизотропна из-за вертикального сдавливания) как для сухой среды, так и для влажной (в последнем случае жидкость двигалась вместе с твердой фазой — «закрытая» система).

Следовательно, по теории Гассманна пористая среда движется как однофазная, ее реальная гетерогенность сказывается лишь на величинах упругих коэффициентов. Подобный подход был предложен также Г. М. Ляховым [133—135] (см. также § 8), однако если у Гассманна учитывался эффект жесткости самого скелета среды (конгломерата шаров), то у Г. М. Ляхова твердые частицы сжимаются так же, как и жидкие — по законам гидростатического сжатия.

Перейдем теперь к рассмотрению предложенной в 1956 г. системы акустических уравнений Био [257].

По Био уравнения движения твердой и жидкой фаз имеют соответственно вид

$$\rho_{11}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho_{12}\frac{\partial w_i}{\partial t}-\frac{\partial \sigma^*_{ij}}{\partial x_j}-b\,(w_i-u_i)=0, \tag{6.16}$$

$$\rho_{12}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho_{22}\frac{\partial w_i}{\partial t}+\frac{\partial mp}{\partial x_i}+b\,(w_i-u_i)=0, \tag{6.17}$$

где ρ_{kl} — некоторые коэффициенты, имеющие размерность плотности; b — коэффициент пропорциональности. Напряжение σ^*_{ij} связано с суммарной нагрузкой следующим соотношением:

$$\Gamma_{ij}=\sigma^*_{ij}-mp\delta_{ij}. \tag{6.18}$$

Пользуясь условием линейности связей и существования упругого потенциала, Био получает, что между деформациями и напряжениями существуют следующие соотношения:

$$\sigma^*_{ij}=Ae\delta_{ij}+2Ne_{ij}+Q\in\delta_{ij},\quad -mp=Qe+R\in, \tag{6.19}$$

где $\partial\in/\partial t=\partial w_i/\partial x_i$.

Первое из соотношений (6.19) можно представить также в виде

$$\sigma^*_{ij}=\left(A-\frac{Q^2}{R}\right)e\delta_{ij}+2Ne_{ij}-\frac{Q}{R}mp\delta_{ij}, \tag{6.20}$$

здесь A, N, Q, R — константы упругих связей среды.

Сопоставим связи (6.19) с соотношением (5.VII) и с соотношением непрерывности

$$\beta p=-(1-\beta_1 K)(1-m_0)e+m_0\in,\ \beta=(1-m_0)\beta_1-m_0\beta_2, \tag{6.21}$$

следующим из (5.III)—(5.IV). Если положить напряжения σ^*_{ll} в формуле (6.18) равными величинами $\sigma_{ij}(1-m)=\sigma^f_{ij}-(1-m)p\delta_{ij}$ в принятых здесь обозначениях, то соотношения (6.20) можно записать также

$$\sigma^f_{ij}=\left(A-\frac{Q^2}{R}\right)e\delta_{ij}+2Ne_{ij}-\left(\frac{Qm}{R}-(1-m)\right)p\delta_{ij}.$$

Отсюда для совпадения уравнений (5.V) и (6.20) должны выполняться следующие равенства:

$$A-\frac{Q^2}{R}=\lambda_1(1-m_0),\quad N=\lambda_2(1-m_0),$$
$$\frac{Qm_0}{R}=(1-m_0)(1-\beta_1 K), \tag{6.22}$$

а для совпадения (6.21) и второго из равенств (3.4)

$$\frac{Q}{m_0}=\frac{(1-\beta_1 K)(1-m_0)}{\beta},\quad \frac{R}{m_0}=\frac{m_0}{\beta}, \tag{6.23}$$

если предположить, что у Био всюду $m_0=m$. Легко видеть, что последнее из равенств (6.22) является следствием соотношений (6.23). Таким образом, четыре параметра модели Био A, N, Q, R связаны с четырьмя параметрами λ_1, λ_2, β_1, β_2 четырьмя уравнениями, что позволяет выразить их друг через друга. В уравнениях движения (6.16)—(6.17) у Био фигурирует градиент не самого давления p, а величина mp. В последующих своих работах [260, 261] Био пишет, что предложенная им в работе [257] (и анализируемая здесь) система уравнений справед-

лива для постоянной, однородной пористости. Действительно, только в этом случае следующее из предложенной им системы уравнение $\nabla^2 mp = 0$ установившегося фильтрационного течения сводится к хорошо известному уравнению $\nabla^2 p = 0$. Но упругие пористые среды, однородные по пористости в начальном недеформированном состоянии, становятся неоднородными при неоднородном напряженном состоянии. Поэтому нужно считать, что в уравнениях (6.16)—(6.17) фигурирует не полное значение пористости, а ее стационарное значение m_0. Различие учета поверхностных сил в уравнениях Био и в принимаемой здесь системе особенно наглядно при сопоставлении уравнений (6.16)—(6.17) и (3.23), (3.25).

В соотношении (6.18) нельзя понимать (см. [10]) величину σ_{ij}^* как истинное напряжение в твердой фазе — это неверно и приводит к ошибке, так как важно, от какого напряжения зависит плотность твердой фазы. Можно показать, что если в линейных упругих связях Био $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^f$, то их нельзя свести к соотношениям (6.21) и (5.VII). Недопустимость использования связи (6.18) при интерпретации σ_{ij}^* как σ_{ij}^f для сред, где можно пренебречь изменениями плотности ρ_1, подчеркивалась также Брутсаертом [265].

Если учитывать в уравнениях Био инерционные члены, то прежде всего уравнение импульса (3.22) для всей среды в целом удовлетворится только тогда, когда

$$\rho_{11} = (1-m)\,\rho_1 - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = m\rho_2 - \rho_{12}. \tag{6.24}$$

Движение жидкости при неподвижном скелете среды будет описываться уравнением

$$\left(\rho_2 - \frac{\rho_{12}}{m_0}\right)\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{b}{m_0}\,w_i = 0, \tag{6.25}$$

которое, как легко видеть, при $\rho_2 \neq 0$ отличается от уравнения Н. Е. Жуковского (3.23) уменьшением эффективной массы жидкости. Поэтому величина $\rho_{12} = -\rho_a$ называется по Био дополнительной, *присоединенной* массой ($\rho_a > 0$).

Таким образом, если интерпретировать σ_{ij}^* в уравнении (6.16) как σ_{ij}^f — $-(1-m_0)\,p\delta_{ij}$, а величину пористости в уравнениях (6.16) и (6.17) приравнивать ее стационарному значению, то уравнения Био (6.16) и (6.17) будут совпадать с соответствующими уравнениями Я. И. Френкеля при $\rho_{12} = 0$, что отмечено также Л. Я. Косачевским [106].

Заметим, что при использовании теории Био для решения конкретных задач Джонс [301, 302], а в ряде случаев Геертсма [293] пренебрегали «присоединенной» массой ρ_{12}. Био [257, 258], рассчитывая скорости распространения звуковых волн, сопоставлял случаи равных и неравных нулю присоединенных масс.

Можно показать, что именно уравнения движения Я. И. Френкеля справедливы с точностью до переноса импульса, вызванного отклонениями истинных скоростей частиц фаз от их средних значений. Для этого нужно воспользоваться способом, предложенным Био [260, 261], а именно, получить линеаризованные уравнения импульса как уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial x_j} = \frac{d_k}{dt}\left(\frac{\partial E_*}{\partial v_i^k}\right) + \frac{\partial D}{\partial v_i^k}, \quad \frac{d_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j^k \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{6.26}$$

где E_* — кинетическая энергия среды; D — диссипативная функция; σ_{ij}^k, v_i^k — фазовые напряжения и скорости.

Как известно, такой способ получения уравнений движения не является более общим, нежели прямое составление уравнений баланса импульса, поскольку теперь частные предположения о математической модели двухфазной среды используются при формулировке выражений E_*, D.

В качестве расчетных скоростей v_i^k ($k = 1, 2$) надо взять либо одну из фазовых, например $v_i^k = u_i$, и относительную $v_i = m_0(w_i - u_i)$, как это делает Био [260, 261], либо обе фазовые скорости w_i, u_i. Будем пользоваться вторым приемом.

Далее о скоростях u_i, w_i можно предположить следующее.

а. Все частицы первой (твердой) фазы двигаются со средней скоростью u_i, а все частицы жидкости — со скоростью w_i. Отклонениями локальных значений скорости от средних пренебрегается.

б. Все частицы твердой фазы переносятся со скоростью u_i, а частицы жидкости двигаются в *среднем* со скоростью w_i — локальные значения скорости v_i в поровом пространстве элементарного макрообъема — случайные величины (фактические предположения Био [260, 261]).

В предположениях «а» для величин E_*, D имеем

$$E_*^{(а)} = \frac{1}{2}\rho_1^0(1-m_0)u_i^2 + \frac{1}{2}\rho_2^0 m_0 w_i^2, \tag{6.27}$$

$$D^{(а)} = \frac{1}{2}r_0(w_i-u_i)^2. \tag{6.28}$$

Отсюда

$$\frac{\partial E_*^{(а)}}{\partial u_i} = \rho_1^0(1-m_0)u_i, \quad \frac{\partial E_*^{(а)}}{\partial w_i} = \rho_2 m_0 w_i, \quad \frac{\partial D^{(а)}}{\partial u_i} = -\frac{\partial D^{(а)}}{\partial w_i} = r_0(u_i-w_i) \tag{6.29}$$

и в уравнениях движения должны фигурировать соответствующие напряжения: $(1-m_0)\sigma_{ij}$, $-m_0 p\delta_{ij}$ (здесь всюду в линейном приближении коэффициенты — величины постоянные). Тогда, как легко видеть, уравнения (6.26) становятся идентичными уравнениями Я. И. Френкеля после их линеаризации.

Предположения «а» были приняты также Брутсаертом [265]. В то же время Био [260, 261] принимает предположение «б» и потому подставляет в уравнения (3.11) величину $E_*^{(б)}$ кинетической энергии

$$E_*^{(б)} = E_*^{(а)} - \frac{1}{2}\rho_2^0(w_i-u_i)^2 m_0(1-f), \tag{6.30}$$

где f — некоторый скалярный (в изотропных средах) параметр, характеризующий случайность микростроения порового пространства. Био определяет этот коэффициент следующим образом:

$$f(w_i-u_i)^2 = \overline{(v_i-u_i)^2}, \tag{6.31}$$

где черта означает знак осреднения по всему объему. Соотношение (6.30) можно представить в виде

$$(1-f)(w_i-u_i)^2 = (w_i-u_i)^2 - \overline{(v_i-u_i)^2} \tag{6.32}$$

и далее можно преобразовать к виду

$$(1-f)(w_i-u_i)^2 = -\overline{(v_i^2-w_i^2)} = -\overline{(v_i-w_i)^2} \tag{6.33}$$

в силу принимаемого Био постоянства в элементарном макрообъеме скорости u_i и определения $w_i = \overline{v_i}$. Таким образом, действительно величина $E_*^{(б)}$ отличается от кинетической энергии среднего движения фаз $E_*^{(а)}$ точно на величину кинетической энергии пульсационного, хаотического движения жидкости

$$E_*^{(б)} = E_*^{(а)} + \frac{1}{2}\rho_2^0 m_0 \overline{(v_i-w_i)^2}. \tag{6.34}$$

Принимая вместо (6.34) выражение (6.30), Био фактически предполагает пропорциональность дисперсии поля локальных скоростей квадрату относительной скорости фаз, что и позволило ему ввести в уравнение движения дополни-

тельную инерционную силу, пропорциональную разности ускорений движения фаз

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\left(E_*^{(б)}-E_*^{(а)}\right)}{\partial u_i}\right)=m_0\rho_2^0(1-f)\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)=\rho_{12}\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right). \tag{6.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\left(E_*^{(б)}-E_*^{(а)}\right)}{\partial w_i}\right)=-\rho_{12}\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial t}\right),\quad \rho_{12}=m_0\rho_2^0(1-f). \tag{6.36}$$

Итак, здесь фактически была произведена следующая операция — сначала выписывалось выражение для энергии случайных отклонений от среднего движения, затем проводилось осреднение и путем дифференцирования определялась величина пульсационного переноса импульса. Подчеркнем, что обычно в механике сплошных сред идут по другому пути — сначала выписывается уравнение импульса для микродвижений среды (например, уравнения Навье — Стокса для турбулентных течений), в нем выделяются члены, соответствующие осредненному движению и пульсациям, а затем проводится осреднение. Тогда силы, связанные с пульсационным движением, проявляются только из-за нелинейности

Таблица 2

Сопоставление обозначений

Био [257]	Система (5.I)—(5.VII)
$Q=M$	$(1-\beta_1K)(1-m_0)m_0\beta^{-1}$
R	$m_0^2\beta^{-1}$
N	$\lambda_2(1-m_0)$
H	$(1-m_0)(\lambda_1+2\lambda_2)+[1-\beta_1K(1-m_0)]^2\beta^{-1}$

Френкель [215]	Геертсма [292]	Система (5.I)—(5.VII)
$1/K_0$	C_r	β_1
$1/K_2$	C	β_2
$1/K$	C_b	$(1-m_0)^{-1}\left(\lambda_1+\frac{2}{3}\lambda_2\right)^{-1}=(1-m_0)^{-1}K^{-1}$
G	G_b	$(1-m_0)\lambda_2$
α_f	—	$\frac{\beta_1K(1-m_0)}{1-\beta_1K(1-m_0)}$

исходного уравнения импульса и обычно рассматриваются как дополнительные напряжения, которые надо добавлять к компонентам напряжений, зависящих от других механизмов передачи импульса. При этом в *линейном приближении пульсационное движение никаких добавок в уравнение импульса не вносит.*

В связи с этим в линеаризованных уравнениях движения фаз будем считать вслед за Я. И. Френкелем, что $\rho_{12} = 0$. Более того, будем в сравнении с контактной передачей пренебрегать пульсационной передачей импульса и при учете других нелинейных эффектов, как и в обычных упругих и жидких (но не турбулизованных) средах (см., например, [58]).

Геертсма [292] рассмотрел объемную деформацию элемента пористой среды без учета сжимаемости жидкости. Он использовал известную в теории упругости теорему взаимности Бетти, сформулировав ее для двух систем напряжений — суммарного напряжения и порового давления, что позволило ему ввести дополнительное соотношение между упругими константами среды. В результате он получил три независимые упругие константы — полную (bulk) сжимаемость среды C_b, сжимаемость материала скелета (matrix) породы C_r, а также жесткость (модуль сдвига) G_b. Геертсма предложил систему экспериментов для измерения этих величин и отметил, что консолидированные песчаники обычно упруги, а при высоких значениях пористости ($m_0 > 0{,}15$) их сжимаемость C_b пренебрежимо мала по сравнению с сжимаемостью материала скелета C_r. В дальнейшем Геертсма и Смит [293] сопоставили предложенные соотношения (уже с учетом сжимаемости жидкости) с соотношением Био. В табл. 2 дана сводка результатов сопоставления различных систем обозначений упругих констант, основанная на указанной на стр. 56 интерпретации напряжений Био (через фиктивные напряжения и поровое давление).

Глава II

ЗВУКОВЫЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

§ 7. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

Влагонасыщенность естественных горных пород заметно влияет на закономерности распространения продольных и поперечных волн, причем эффект полного насыщения порового пространства особенно существен у мягких горных пород (грунтов). Для определенности в табл. 3 приведены результаты некоторых экспериментальных измерений скорости распространения продольных v и поперечных v_s волн совместно с обычно используемой характеристикой грунта.

Таблица 3

№ п/п	Вид грунта	v, м/сек	v_s, м/сек
1	Влажная глина [223]	1500	150
2	Лёсс естественной влажности [223]	800	260
3	Плотный травянисто-песчаный грунт [223]	480	280
4	Песок мелкозернистый [223]	300	110
5	Песок среднезернистый [223]	550	160
6	Гравий средней крупности [223]	760	180
7	Перемятый глинистый грунт [268]	1500	450
8	Неуплотненная глина [268]	1500	450
9	Оксфордская глина]268]	1500	600

Данные табл. 3 показывают, что наблюдаемые скорости продольных и поперечных волн существенно меняются даже внутри одного класса горных пород — класса грунтов. Эти изменения можно попытаться объяснить в рамках однофазных теорий сплошной среды степенью уплотненности среды (сравнительным изменением величин упругих коэффициентов и плотности среды), что соответствует примерно пропорциональному увеличению скоростей обоих типов волн (коэффициент Пуассона меняется не столь резко).

Действительно, для грунтов № 2—9 (наличие жидкости у которых не отмечалось (см. табл. 3) соотношение $v/v_s = 3 \div 4$, однако у грунта № 1 (влажного) это соотношение достигает 10. С другой стороны, известно, что эффект насыщения порового пространства несравненно слабее для сцементированных горных пород.

Объяснение этих качественных различий следует искать в теории динамического деформирования пористых двухфазных сред.

Для анализа распространения волн представим векторы скорости смещения твердой и жидкой фаз в следующем виде:

$$\vec{u} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}\varphi_1 + \operatorname{rot}\vec{\psi}_1), \quad \vec{w} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad}\varphi_2 + \operatorname{rot}\vec{\psi}_2),$$

где φ_1, φ_2 — скалярные, $\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$ — векторные потенциалы смещения.

Подстановка этих выражений в систему уравнений (5.I)—(5.IV), (5.VII) приводит (в пренебрежении силами тяжести) к уравнениям, решения которых будут решениями исходной системы

$$\begin{cases} \rho_1 \dfrac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \rho_2 \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - \dfrac{\mu}{a_0} m_0 \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right) - \dfrac{1}{B}\nabla^2\varphi_1 - \beta_1 K p = 0, \\ \rho_2 \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + p + \dfrac{\mu}{a_0} m_0 (1-m_0)\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right) = 0, \\ (\beta_1(1-m_0)(1-\beta_1 K) + \beta_2 m_0)\, p + (1-m_0)(1-\beta_1 K)\nabla^2\varphi_1 + \\ \qquad + m_0\nabla^2\varphi_2 = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} \rho_1 \dfrac{\partial^2\vec{\psi}_1}{\partial t^2} - \rho_2 \dfrac{\partial^2\vec{\psi}_2}{\partial t^2} - \dfrac{\mu_0}{a_0} m_0 \left(\dfrac{\partial\vec{\psi}_2}{\partial t} - \dfrac{\partial\vec{\psi}_1}{\partial t}\right) - \lambda_2\nabla^2\vec{\psi}_1 = 0, \\ \rho_2 \dfrac{\partial^2\vec{\psi}_2}{\partial t^2} + \dfrac{\mu}{a_0} m_0 (1-m_0)\left(\dfrac{\partial\vec{\psi}_2}{\partial t} - \dfrac{\partial\vec{\psi}_1}{\partial t}\right) = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Рассмотрим плоские гармонические продольные волны, т. е. изучим решение системы (7.1) типа

$$\varphi_1 = \varphi_1^0 e^{i(\omega t - \eta x)}, \quad \varphi_2 = \varphi_2^0 e^{i(\omega t - \eta x)}, \quad p = p_0 e^{i(\omega t - \eta x)},$$

где φ_1^0, φ_2^0, p_0 — постоянные величины.

Подстановка этих соотношений в уравнения приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно φ_1^0, φ_2^0, p:

$$\begin{gathered} \left(-\rho_1\omega^2 + i\omega\frac{\mu}{a_0}m_0 + \frac{\eta^2}{B}\right)\varphi_1^0 + \left(\rho_2\omega^2 - i\omega\frac{\mu}{a_0}m_0\right)\varphi_2^0 + \beta_1 K p_0 = 0, \\ -\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)\,i\omega\varphi_1^0 + \left(\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)\,i\omega - \rho_2\omega^2\right)\varphi_2^0 + p_0 = 0, \\ -(1-m_0)(1-\beta_1 K)\,\eta^2\varphi_1^0 - m\eta^2\varphi_2^0 + \\ + (\beta_1(1-m_0)(1-\beta_1 K) + \beta_2 m_0)\, p_0 = 0. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Система (7.3) имеет отличное от нуля решение, если величины ω и η удовлетворяют следующему дисперсионному уравнению [167, 215]:

$$\xi^4+\xi^2\left(M_1+\frac{i}{\omega\tau_\rho}M_2\right)+M_3\left(1-\frac{i}{\omega\tau}\right)=0, \tag{7.4}$$

где

$$M_1=-1+\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\left\{\beta_1K(1-m_0)(2-\beta_1K)-\frac{\beta}{B}\right\},\quad M_3=\frac{m_0\rho_\infty^2}{\rho_1\rho_2}\frac{\beta}{B},$$

$$M_2=\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\left\{[1-(1-m_0)\beta_1K]^2+\frac{\beta(1-m_0)}{B}\right\},$$

$$\rho=\frac{\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty},\quad \tau=\frac{\rho_1\rho_2a_0}{\mu m_0\rho_0},$$

$$\beta=(1-m_0)\beta_1(1-\beta_1K)+m_0\beta,\ \xi=\frac{\eta}{\omega}\frac{1}{\sqrt{B\rho}},$$

$$\rho_0=(1-m_0)\rho_1+m_0\rho_2,\quad \frac{1}{\rho_\infty}=\frac{1-m_0}{\rho_1}+\frac{m_0}{\rho_2}.$$

Я. И. Френкель [215] при анализе дисперсионного уравнения для продольных волн прежде всего отметил важный случай чрезвычайно больших фильтрационных сопротивлений, когда один из корней уравнения ξ^2 соответствует волнам с очень малым затуханием, а другой — с очень большим. Для определения приближенного значения корня, соответствующего волнам первого рода, Я. И. Френкель предложил воспользоваться разложением по степеням малого параметра $i\omega\tau$

$$\xi^2=\xi_0+i\omega\tau\xi_1-\omega^2\tau^2\xi_2+\ldots \tag{7.5}$$

Если подставить выражение (7.5) в дисперсионное уравнение (7.4) и приравнять коэффициенты при различных степенях $\omega\tau$, начиная с $(\omega\tau)^{-1}$, то получим такую последовательность соотношений

$$\begin{gathered}M_2\xi_0-M_3=0,\\ \xi_0^2+M_1\xi_0-M_2\xi_1+M_3=0,\\ 2\xi_1\xi_0+M_1\xi_1-M_2\xi_2=0\end{gathered} \tag{7.6}$$

и т. д.

Отсюда находим, что

$$\xi_0=\frac{M_3}{M_2},\ \xi_1=\frac{\xi_0^3+M_1\xi_0^2+M_3\xi_0}{M_3}. \tag{7.7}$$

Ограничимся вторым членом разложения (7.5). Тогда будем иметь следующую формулу с точностью до величин первого порядка по $\omega\tau$:

$$\frac{\eta}{\omega}=\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}\sqrt{\xi_0+i\omega\tau\xi_1}\approx\sqrt{\xi_0}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}+\frac{1}{2}\frac{i\omega\tau\xi_1}{\sqrt{\xi_0}}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}. \tag{7.8}$$

С другой стороны, имеем

$$e^{i(\omega t-\eta x)}=e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)-\delta x},\quad \frac{\eta}{\omega}=\frac{1}{v}+i\frac{\delta}{\omega}. \tag{7.9}$$

Из сопоставления этих выражений получим результирующие формулы Я. И. Френкеля для нулевого (по $\omega\tau$) приближения v_0, для скорости волны v_a и коэффициента затухания δ_a первой волны

$$\frac{1}{v_0}=\sqrt{\xi_0}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}=\sqrt{\beta\rho_0}\left\{\frac{\beta(1-m_0)}{B}+[1-\beta_1K(1-m_0)]^2\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.10}$$

$$\delta_a\approx\frac{\tau\omega^2}{2}\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_0}}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}=\frac{\tau\omega^2}{2}\frac{1}{M_3}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m\rho_\infty}}\,\xi_0^{3/2}\left(\xi_0+M_1+\frac{M_2}{\xi_0}\right)=$$

$$=\frac{\tau\omega^2}{2}\frac{1}{v_0^3}\left\{v_0^2+\frac{m}{\rho_1\rho_2B\beta}\frac{1}{v_0^2}+\frac{1}{\rho_1\beta}\left[K\beta_1(1-m_0)(2-\beta_1K)-\frac{\beta}{B}\right]-\frac{1}{\rho_\infty\beta}\right\}. \tag{7.11}$$

Соотношения (7.10)—(7.11) совпадают с формулами (33а) и (40а) работы Я. И. Френкеля [215], если в последних заменить параметр α_f выражением (6.9). Кроме того, формула (40а) работы [215] доумножена на коэффициент $\rho_1\rho_2m_0(1-m_0)$.

Био [257] начинает анализ дисперсионного уравнения для продольных волн с рассмотрения «чистоупругих» волн, соответствующих среде, насыщенной жидкостью с нулевой вязкостью ($\mu=0$). Соответственным образом упрощенное дисперсионное уравнение позволяет Био сделать существенное замечание: в волне первого рода смещения твердых и жидких частиц происходят в одном и том же направлении, а в волне второго рода — различны по знаку, причем большей скоростью распространения характеризуется волна первого рода. Био выделяет также характерный случай равенства фазовых скоростей — соответствующая волна распространяется со скоростью $v_0=\sqrt{H/\rho_0}$ (см. табл. 2).

Отметим, что если воспользоваться данными табл. 2 (§ 3), то легко установить совпадение этого результата Био с выражением (7.10) для v_0, полученного Я. И. Френкелем.

Далее Био переходит к рассмотрению монохроматических волн в условиях объемного вязкостного взаимодействия, но ограничивается (см. далее § 11) рассмотрением частот меньших, нежели $f=\pi\nu/4d^2$, где ν — кинематическая вязкость жидкости (для воды $f=10^2$ *гц* при $d=0{,}01$ *см* и $f=10^4$ *гц* при $d=0{,}001$ *см*).

Для продольных волн с затуханием Био выписал общее дисперсионное уравнение, затем привел примеры численных расчетов для скоростей волн первого и второго родов малых частот для некоторых наборов констант, причем в одном из примеров (при $\rho_{12}=0$) у Био получилась уменьшающаяся с ростом частоты скорость распространения волны первого рода. Кроме того, Био выписывает приближенные аналитические выражения (получающиеся весьма громоздкими) для скорости и коэффициента затухания волн при малых частотах и отмечает диффузионный характер волн второго рода. Подчеркнем, что в пределе, при $\omega\to0$, Био приходит к выражению для скорости волны первого рода, причем при интерпретации упругих коэффициентов Био согласно § 6 это выражение в точности совпадает с формулой Я. И. Френкеля (7.13).

Геертсма и Смит [293], выразив упругие константы Био через сжимаемости фаз, попытались упростить общее дисперсионное уравнение для продольных

волн. Геертсма и Смит отмечают: можно показать, что для большинства горных пород $(b/2a) \gg 1$, где k — проницаемость породы, $L = R/m_0^2$,

$$b = \frac{\rho_0\left[\frac{\rho_{22}}{m_0^2} + \frac{L}{H} - 2\,\frac{\rho_{12}+\rho_{22}}{m_0}\,\frac{H-(1-m_0)\,(\lambda_1+2\lambda_2)}{H}\right] - i\,\frac{\mu}{\omega k \rho_0}}{\left(\frac{\rho_{22}}{m_0^2} - \frac{\rho_{12}+\rho_{22}}{m_0}\right)^2 \frac{1}{\rho_0^2} - i\,\frac{\mu}{\omega k \rho_0}}, \tag{7.12}$$

$$a = \frac{\rho_0}{H}\sqrt{\frac{(1-m_0)\,(\lambda_1+\lambda_2)\,\alpha^{-1}}{\left(\frac{\rho_{22}}{m_0^2} - \frac{\rho_{12}+\rho_{22}}{m_0}\right)^2 \frac{1}{\rho_0^2} - i\,\frac{\mu}{k\omega\rho_0}}}. \tag{7.13}$$

Отсюда они находят следующие значения корней дисперсионного уравнения:

$$z_a \approx \frac{1}{b}, \qquad z_b = \frac{b}{a^2}. \tag{7.14}$$

Далее приняв, что для волны первого рода выполнено условие относительной малости величины $\lambda\delta$ (где λ — длина волны, δ — коэффициент затухания с пройденным расстоянием), Геертсма и Смит получают

$$v_a^2 \approx \frac{v_\infty^4 + v_0^4\left(\frac{\mu}{k\rho_0\omega A}\right)^2}{v_\infty^2 + v_0^2\left(\frac{\mu}{k\rho_0\omega A}\right)^2}, \tag{7.15}$$

$$\frac{\lambda_a \delta_a}{\pi} \approx \frac{v_\infty^2/v_0^2 - 1}{\left(\frac{\mu}{k\omega A\rho}\right) - \left(\frac{k\omega A\rho_0}{\mu}\right)\frac{v_\infty^2}{v_0^2}}, \tag{7.16}$$

$$v_0^2 = \frac{H}{\rho_0}, \qquad v_\infty^2 = \frac{L\rho_0 + H\rho_c - 2\rho_2\,(H-(1-m_0)/\beta)}{\rho_0\rho_c - \rho_2^2},$$

$$A = \frac{\rho_0\rho_c - \rho_2^2}{\rho_0^2}, \qquad \rho_c = \frac{\rho_2}{m_0} \tag{7.17}$$

Геертсма и Смит отмечают, что выражения (7.15)—(7.16) совпадают с формулами для скорости и коэффициента затухания в материале, связь деформаций с напряжениями которого схематически представляется «стандартным реологическим элементом» [101, 293].

Запишем выражения (7.15)—(7.17) в принятых здесь обозначениях, принимая в согласии с § 3, что $\rho_{12} = 0$. Тогда

$$v_a^2 \approx \frac{v_\infty^4 + v_0^4\,(\omega\tau)^{-2}}{v_\infty^2 + v_0^2\,(\omega\tau)^{-2}}, \tag{7.18}$$

$$\delta_a \approx \frac{1}{2}\,\frac{\omega}{v_a}\,\frac{v_\infty^2 - v_0^2}{\frac{1}{\omega\tau}\,v_0^2 - \omega\tau v_\infty^2} = \frac{\tau}{2v_a}\,\frac{v_\infty^2 - v_0^2}{\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2 v_0^2 - v_\infty^2}, \tag{7.19}$$

$$\begin{cases} v_0^2 = \dfrac{1}{\rho_0}\left\{\dfrac{[1-(1-m_0)\,\beta_1 K]^2}{\beta} + \dfrac{1-m_0}{B}\right\} = \dfrac{H}{\rho_0}, \quad A = \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_0}\cdot\dfrac{1-m_0}{m_0}, \\ v_\infty^2 = \dfrac{1}{\beta}\left\{\dfrac{m_0}{\rho_2} + \dfrac{1-m_0}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_1}\left[\dfrac{\beta}{B} - 2\,(1-2m_0)\,\beta_1 K + (1-m_0)^2\,\beta_1 K\right]\right\}. \end{cases} \tag{7.20}$$

Соотношения (7.20) существенно упрощаются для суспензий — согласно Геертсма и Смиту [293] в этом случае $C_b = [(1 - m_0) K]^{-1} = 0$, $\lambda_2 = \infty$, $\rho_{12} = 0$ (см. также § 8).

Тогда (в принятых здесь обозначениях) имеем

$$v_0^2 = \frac{1}{\beta\rho_0}, \quad v_\infty^2 = \frac{1}{\beta\rho_\infty}.$$

Обратимся теперь к закономерностям распространения *поперечных волн*. Потенциал поперечного сдвига можно найти путем решения системы уравнений (7.2).

Заметим предварительно, что система уравнений (7.2) сводится к уравнению (5.38) относительно, например, потенциала $\vec{\psi}_1$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\vec{\psi}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda_2}{\rho_1}\nabla^2\vec{\psi}_1\right) + \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial^2\vec{\psi}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda^2(1-m_0)}{\rho_0}\nabla^2\vec{\psi}_1\right) = 0, \qquad (7.21)$$

типичному уравнению динамических процессов в релаксирующих средах. Если ввести характерное время процесса T (например, время полного периода колебания в волне), то из уравнения (7.21) сразу следует, что при быстрых процессах ($\tau \gg T$) поперечные колебания распространяются со скоростью $v_{s\infty} = \sqrt{\lambda_2/\rho_1}$, а при медленных ($\tau \ll T$) — со скоростью $v_{s0} = \sqrt{\lambda_2(1 - m_0)/\rho_0}$. Отсюда видно, что в этих предельных случаях модуль поперечного сдвига $\lambda_2(1 - m_0)$ один и тот же, но эффективная плотность среды разная: при быстрых процессах это только плотность твердой фазы $\rho_1(1 - m_0)$ на единицу объема всей среды, а при медленных — средняя плотность всей среды ρ_0. Другими словами, при $\tau \gg T$ колеблется только скелет пористой среды, а при $\tau \ll T$ — обе фазы среды. Откладывая дальнейший разбор этого эффекта до § 8, перейдем теперь к выводу и анализу дисперсионного соотношения.

Будем искать решения типа

$$\psi_1 = \psi_1^0 \exp(i\omega t - i\eta x), \quad \psi_2 = \psi_2^0 \exp(i\omega t - i\eta x).$$

Тогда из системы уравнения (7.2) следует дисперсионное уравнение, которое Я. И. Френкель представил в виде

$$(1 - m_0)\lambda_2\left(\frac{\eta}{\omega}\right)^2 = \rho_1(1 - m_0) + \frac{1}{\dfrac{1}{\rho_2 m_0} + i\dfrac{\omega a_0}{\mu m_0^2(1 - m_0)}} \qquad (7.22)$$

(напомним, что коэффициент $\varkappa$ в уравнениях (6.5), (6.6) Я. И. Френкеля равен: $\varkappa = a_0 m_0^{-2}(1 - m_0)^{-1}$). Я. И. Френкель выписал решение (7.22), справедливое для малых частот, и получил отсюда следующие формулы для скорости распространения v_{s0} и коэффициента затухания δ_{s0}:

$$v_{s0} = \sqrt{\frac{(1 - m_0)\lambda_2}{(1 - m_0)\rho_1 + m_0\rho_2}} = \sqrt{\frac{(1 - m_0)\lambda_2}{\rho_0}}, \qquad (7.23)$$

$$\delta_{s0} = \frac{1}{2}\frac{a_0}{\mu(1 - m_0)}\frac{\rho_2^2}{\rho_0}\frac{\omega^2}{v_{s0}}. \qquad (7.24)$$

Био в своем исследовании [257] отмечает, что при отсутствии межфазового вязкостного объемного взаимодействия ($R_i = 0$) поперечная волна распространяется со скоростью

$$v_s = \sqrt{\frac{(1-m_0)\lambda_2}{\rho_{11}\{1-\rho_{12}^2/\rho_{11}\rho_{22}\}}}, \tag{7.25}$$

$$\rho_{11} = \rho_1(1-m_0) - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = \rho_2 m_0 - \rho_{12},$$

причем вращение $\vec{\Omega}_1$ твердой фазы связано с вращением жидкости $\vec{\Omega}_2$ условием

$$\vec{\Omega}_2 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\vec{\Omega}_1. \tag{7.26}$$

Поскольку по Био $\rho_{12} < 0$, жидкость и скелет сдвигаются в одном направлении. Если $\rho_{12} = 0$, то жидкость остается неподвижной, а скорость $v_s = \sqrt{\lambda_2/\rho_1}$.

Заметим, что Био допустил в соответствующем месте своей работы неточность: полагая в фигурной скобке в уравнении (7.25) и выражении (7.26) $\rho_{12} = 0$, он сохраняет $\rho_{12} \neq 0$ в выражении (7.25) для ρ_{11} и пишет: «$v_s = \sqrt{\lambda_2(1-m_0)/\rho_{11}}$, где ρ_{11} — масса твердой фазы плюс кажущаяся масса из-за относительного движения твердых частиц в жидкости» [257].

Для поперечных волн Био получает дисперсионное уравнение и выписывает выражение для безразмерной скорости (отнесенной к скорости $\sqrt{(1-m_0)\lambda_2/\rho_0}$) волны, в которой нет относительного движения жидкости и твердых частиц. Затем приводит в виде графиков результаты численного подсчета скорости и коэффициента затухания до значения частоты $\omega = 0{,}154 \cdot \mu m_0^2(1-m_0)/(a_0 m_0 \rho_2)$ или до значения $\zeta_1 = \omega a_0 \rho_2/\mu m_0 (1-m_0) = 0{,}154$ ($2 \ln \zeta_1 = -3{,}7$). Для таких малых частот Био предлагает следующие приближенные формулы:

$$v_s = \sqrt{\frac{(1-m_0)\lambda_2}{\rho_0}}\left(1 + \frac{1}{8}\left(4\frac{\rho_2 m_0 - \rho_{12}}{\rho_0} - \frac{m_0^2\rho_2^2}{\rho_2^2}\right)\zeta_1\right), \tag{7.27}$$

$$\delta_s = \frac{1}{2}\frac{m_0}{\rho_0}\sqrt{\frac{\rho_0}{(1-m_0)\lambda_2}}\frac{\mu m(1-m)}{a_0}\zeta_1^2 = \frac{1}{2}\frac{a_0}{(1-m_0)\mu}\frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\frac{\omega^2\rho_2^2}{\sqrt{(1-m_0)\lambda_2}}. \tag{7.28}$$

Обратим внимание, что в выражение (7.27) для скорости входит величина ρ_{12}, тогда как выражение (72.8) для коэффициента затухания δ_s (для малых частот) не зависит от величины ρ_{12} и совпадает с асимптотикой (7.24). Этот факт подтверждается графиками работы [257].

В общем случае произвольной частоты из уравнения (7.22) следует

$$\frac{1}{v_s} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda_2(1-m_0)}}\left\{\left(\frac{1+\left(\frac{\rho_1(1-m_0)}{\rho_0}\right)^2\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2}\right)^{1/2} + \frac{1+\frac{\rho_1(1-m_0)}{\rho_0}\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2}\right\}^{1/2}, \tag{7.29}$$

$$\delta_s = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda_2(1-m_0)}}\left\{\left(\frac{1+\left(\frac{\rho_1(1-m_0)}{\rho_0}\right)^2\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2}\right)^{1/2} - \frac{1+\frac{\rho_1(1-m_0)}{\rho_0}\zeta_1^2}{1+\zeta_1^2}\right\}^{1/2}. \tag{7.30}$$

В расчетах по формуле (7.29) (см. рис. 4) в качестве параметра использовалась величина

$$\gamma = \frac{\rho_2 m_0}{\rho_1 (1-m_0)}, \quad \frac{\rho_1 (1-m_0)}{\rho_0} = \frac{1}{1+\gamma}.$$

Из выражений (7.29) нетрудно получить формулы для скорости поперечных волн относительно малых частот (7.23), а также и больших частот (или малых сил фильтрационного сопротивления):

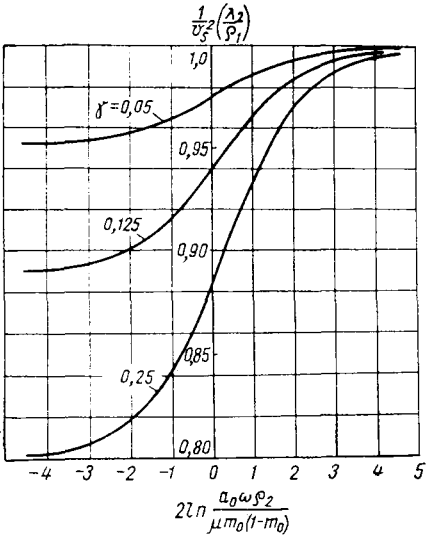


Рис. 4. Зависимость скорости поперечной монохроматической волны v_s от частоты колебаний и параметров среды.

$$v_s \to v_{s\infty} = \sqrt{\frac{\lambda_2 (1-m_0)}{\rho_1 (1-m_0)}} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\rho_1}}, \quad \zeta_1 \to \infty, \qquad (7.31)$$

что совпадает с результатом качественного анализа уравнения (7.21) со скоростью поперечных волн в сухой ($\rho_2 = 0$) среде.

Выражение (7.31) совпадает со скоростью Био (7.25) поперечных волн в рассматриваемой двухфазной среде при $\mu = 0$, если только положить $\rho_{12} = 0$. Формула (7.31) как величина скорости волн при больших частотах была также получена Брутсаертом [265].

Эксперименты Н. В. Царевой [221] свидетельствуют о том, что скорость распространения переднего фронта волны чистого сдвига в водонасыщенном и сухом песке одинакова (с точностью проводимых измерений). Так как скорость фронта согласно (7.21) совпадает со скоростью гармонических волн при $\omega \to \infty$ — см. (7.31),— то результаты Н. В. Царевой подтверждают возможность пренебрежения дополнительной инерционной силой Био в уравнениях движения.

При переходе через границы раздела между газом с низким давлением и жидкостью в одной и той же пористой среде скорость v_s испытывает небольшой скачок — не более, чем в N_s раз, где

$$N_s = \sqrt{\frac{\rho_1 (1-m_0) + m_0\rho_2}{\rho_1 (1-m_0)}},$$

поскольку плотность газа в таких условиях пренебрежимо мала. При практических замерах v_s такая разница не улавливается. Это и позволяет, исходя из экспериментальных данных, сделать, например, вывод, что для скорости поперечных волн при переходе через зеркало грунтовых вод скачка нет [129, 305].

Для коэффициента затухания по уравнению (7.30) следует асимптотическое выражение

$$\delta_s \approx \frac{\omega\gamma}{2\zeta_1}\left(1 - \frac{(2+\gamma)^2}{4\zeta_1}\right)\sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_2}}, \quad \zeta_1 \to \infty, \qquad (7.32)$$

т. е. если фиксирована частота ω, а параметры пористой среды переменны, то $\delta_s \to 0$ как при $\zeta_1 \to 0$, — см. (7.24), так и при $\zeta_1 \to \infty$, а в некоторой промежуточной точке претерпевает максимум. При $\omega \to \infty$ и фиксированных параметрах среды величина δ_s стремится к некоторому постоянному значению, равному

$$\delta_s \to \frac{\mu m_0^2}{2a_0\rho_1}\sqrt{\frac{\rho_1}{\lambda_2}}. \qquad (7.33)$$

Качественно соответствующие графики [164] иллюстрируют зависимость коэффициента затухания на длину волны, равного $(2\pi\delta_\zeta v_\zeta/\omega)^2$, от частоты колебаний. Зависимость безразмерной величины

$$U_s = \frac{\lambda_2 a_0^2 \rho_2^2}{\rho_1 \mu m_0^2 (1-m_0)^2}\,\delta_s \qquad (7.34)$$

от переменной ζ_1 (рис. 5) иллюстрирует влияние частоты колебаний на коэффициент затухания δ_s на единицу длины пройденного волной расстояния при фиксированных параметрах среды и жидкости.

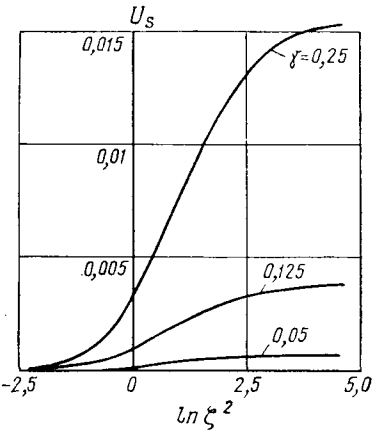


Рис. 5. Зависимость коэффициента затухания поперечной монохроматической волны от частоты колебаний (при фиксированных параметрах среды).

Сдвиговые деформации определяются только фиктивными напряжениями и непосредственно не зависят от эффектов сжимаемости фаз (величин β_1, β_2). Поэтому для изучения поперечных волн можно воспользоваться моделью, в которой пренебрегается сжимаемостью фаз [164, 166], если считать, что параметры $\lambda_1(1-m_0)$, $\lambda_2(1-m_0)$ учитывают и взаимные смещения частиц, и их сжимаемость из-за контактных сил, т. е. что $(1-m_0)\lambda_1$, $(1-m_0)\lambda_2$ являются упругими характеристиками реальной пористой среды при отсутствии в них жидкости.

§ 8. ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ И ПЕРЕУПАКОВКИ В МЯГКИХ СРЕДАХ

Выявление механических особенностей процессов, происходящих в волнах I и II рода, весьма затруднено из-за сложности дисперсионного уравнения (7.3), хотя численное его решение, а следовательно, и количественные оценки скоростей распространения волн и коэффициентов затухания вполне доступны при известных значениях упругих констант. Однако если воспользоваться предложенной выше механической классификацией грунтов и горных пород, можно упростить анализ и выявить существенные качественные особенности волн. Для мягких пористых сред величина ε является малым параметром. Воспользуемся этим для упрощения дисперсионного уравнения (7.3), которое можно представить в следующем виде:

$$\xi^4 + \xi^2\left(-1 + A_1\varepsilon + \frac{\rho_\infty}{\rho_0}(1+A_2\varepsilon)\frac{i}{\omega\tau}\right) + \frac{m_0\rho_\infty^2 A_3}{\rho_1\rho_2}\varepsilon\left(1-\frac{i}{\omega\tau}\right) = 0, \qquad (8.1)$$

$$A_1 = \frac{\rho_\infty}{\rho_1}\left(KB\frac{\beta_1}{\beta_2}(1-m_0)(2-\beta_1 K) - 1\right), \quad \varepsilon = \beta B^{-1},$$

$$A_2=(1-m_0)\left(1-2\frac{\beta_1}{\beta_*}KB+\frac{K^2\beta_1^2B}{\beta}(1-m_0)\right),$$

$$A_3=1-\beta_1K+\frac{\beta_2m_0}{\beta_1(1-m_0)},$$

т. е. для упрощения выражений

$$(\xi^2)_{1,2}=\frac{1}{2}(1-\varepsilon A_1)-\frac{1}{2}\frac{\rho_\infty}{\rho_0}(1+\varepsilon A_2)\frac{i}{\omega\tau}\mp$$

$$\mp\frac{1}{2}\sqrt{\left(-1+A_1\varepsilon+\frac{\rho_\infty}{\rho_0}(1+A_2\varepsilon)\frac{i}{\omega\tau}\right)^2-4\frac{m_0\rho_\infty^2A_3}{\rho_1\rho_2}\varepsilon\left(1-\frac{i}{\omega\tau}\right)}. \qquad (8.2)$$

Воспользовавшись разложениями в ряд по малому параметру ε и пренебрегая величинами порядка ε^2, получим

$$(\xi^2)_{a,b}=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\pm\varepsilon\frac{R_1\zeta^2+R_2}{\zeta^2+1}+i\left(-\frac{1}{2\zeta}\pm\frac{1}{2\zeta}\pm\varepsilon\zeta\frac{R_1-R_2}{\zeta^2+1}\right), \qquad (8.3)$$

$$\zeta=\frac{\rho_0}{\rho_\infty}\omega\tau,\quad R_1=\frac{m_0\rho_\infty^2}{\rho_1\rho_2}A_3,\quad R_2=\frac{m_0\rho_\infty\rho_0}{\rho_1\rho_2}A_3, \qquad (8.4)$$

где индексу a соответствует верхний, а индексу b — нижний знак в выражении для корней (8.3). Всего корней дисперсионного уравнения четыре, что соответствует продольным волнам двух типов — волн первого и второго рода согласно терминологии Френкеля — Био [215, 257].

Рассмотрим сначала *волны первого рода*, которым соответствует верхний знак в уравнении (8.3),

$$\xi_a^2=\varepsilon\frac{R_1\zeta^2+R_2}{\zeta^2+1}+i\varepsilon\frac{R_1-R_2}{\zeta^2+1}\zeta. \qquad (8.5)$$

Тогда для волны, бегущей в положительном направлении по оси x, получим

$$\xi_a=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}}\left(\sqrt{\sqrt{(R_1^2\zeta^2+R_2^2)(\zeta^2+1)}+R_1\zeta^2+R_2}-\right.$$

$$\left.-i\sqrt{\sqrt{(R_1^2\zeta^2+R^2)(\zeta^2+1)}-R_1\zeta^2-R_2}\right), \qquad (8.6)$$

где использованы также неравенство $R_2>R_1$ $(\rho_1>\rho_2)$ и взяты арифметические значения радикалов. В частном случае, когда $\rho_1=\rho_2$, имеем $R_2=R_1$, и волны первого рода оказываются незатухающими.

Теперь можно определить скорость распространения v_a и коэффициент затухания δ_a волны первого рода. Так, для скорости v_a получаем

$$\frac{1}{v_a}=\frac{\sqrt{\beta\rho_0}}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{1+R_1^2\zeta^2/R_2^2}{1+\zeta^2}\right)^{1/2}+\frac{1+R_1\zeta^2/R_2}{1+\zeta^2}}, \qquad (8.7)$$

где

$\beta=(1-m_0)\beta_1+m_0\beta_2$, $\rho_0=(1-m_0)\rho_1+m_0\rho_2$ (см. рис. 6).

При очень низких частотах колебаний или же при очень высоком фильтрационном сопротивлении пористой среды (этому случаю соответствуют волны обычных сейсмических частот в водонасыщенных грунтах) $\zeta = \omega\rho a_0/\mu \to 0$, и мы имеем

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho_0}}\left[1 - \frac{1}{8}\zeta^2\left(\frac{R_1}{R_2}+3\right)\left(\frac{R_1}{R_2}-1\right)\right] \tag{8.8}$$

и в пределе $v_a \to v_0 = 1/\sqrt{\beta\rho_0}$ при $\zeta \to 0$.

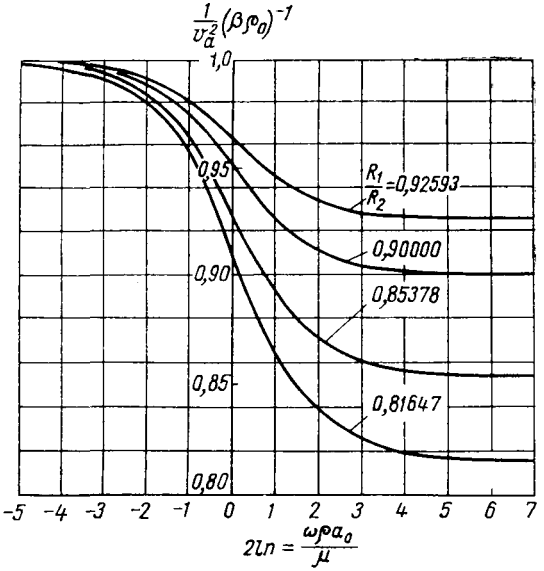


Рис. 6. Зависимость скорости продольной монохроматической волны первого рода v_a в мягкой насыщенной среде от частоты колебаний и параметров среды.

При очень больших частотах колебаний в волне или же при очень малом фильтрационном сопротивлении среды $\zeta \to \infty$, и мы получаем следующее предельное значение скорости волны:

$$v_a \to v_\infty = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho_\infty}}, \quad \frac{1}{\rho_\infty} = \frac{1-m_0}{\rho_1} + \frac{m_0}{\rho_2}, \quad \zeta \to \infty. \tag{8.9}$$

Для коэффициента затухания δ_a волны первого типа имеем следующее выражение:

$$\delta_a = \omega\frac{\sqrt{\beta\rho_0}}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{1+R_1^2\zeta^2/R_2^2}{1+\zeta^2}\right)^{1/2} - \frac{1+R_1\zeta^2/R_2}{1+\zeta^2}}. \tag{8.10}$$

При фиксированной частоте ω и очень малых ($\zeta \to \infty$) или при очень больших ($\zeta \to 0$) фильтрационных сопротивлениях $\delta_a \to 0$,

а при некотором промежуточном значении коэффициент затухания претерпевает максимум.

Получающуюся форму кривой для коэффициента затухания, происходящего на расстоянии, равном длине волны, можно объяснить следующим образом. При очень малом фильтрационном сопротивлении среды, хотя жидкость и смещается относительно скелета, диссипация энергии волн также мала. Если фильтрационное сопротивление становится больше, то растут и потери энергии, но этот рост не монотонен — начиная с некоторого значения, дальнейшее увеличение фильтрационного сопротивления приводит к уменьшению интенсивности смещений жидкости относительно твердого скелета, т. е. к уменьшению потерь энергии волн [167].

Для изучения зависимости коэффициента затухания от частоты колебания при фиксированных параметрах среды удобно переписать выражение (8.10) в следующем виде:

$$U_a = \frac{\delta_a^2 \rho^2 a_0^2}{\beta \rho_0 \mu_0^2} = \frac{\zeta^2}{2}\left(\sqrt{\frac{1+R_1^2\zeta^2/R_2^2}{1+\zeta^2}} - \frac{1+R_1\zeta^2/R_2}{1+\zeta^2}\right). \qquad (8.11)$$

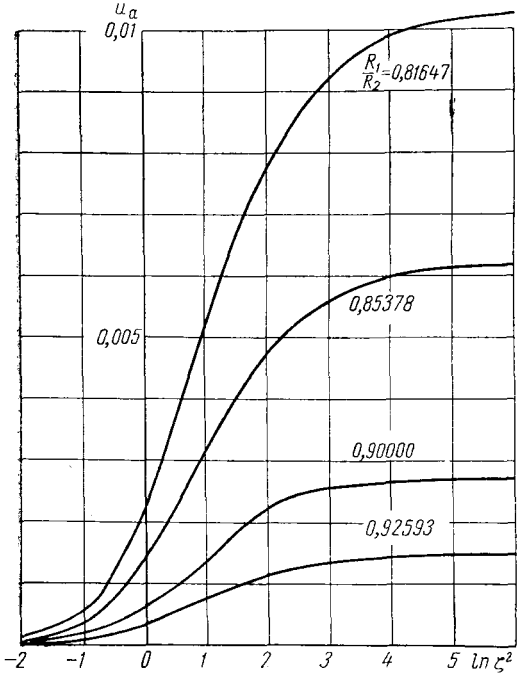


Рис. 7. Зависимость коэффициента затухания продольной монохроматической волны первого рода в мягкой насыщенной среде от частоты колебаний (при фиксированных параметрах среды).

Тогда зависимость выписанной слева величины U_a от ζ^2 (см. рис. 7) фактически является безразмерным представлением зависимости $\delta_a^2 = f(\omega^2)$. Можно показать, что при $\zeta \to \infty$ (т. е. $\omega \to \infty$, а параметры среды фиксированы) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$U_a \to \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_1}{R_2}\right)-1\right\} = \frac{1}{4}\frac{\rho_\infty}{\rho_0} m_0^2 (1-m_0)^2 \times \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^4, \quad \zeta \to \infty \qquad (8.12)$$

или

$$\delta_a \to \frac{\sqrt{\beta\rho_\infty}}{2} \frac{\mu m_0(1-m_0)}{a_0\rho}\frac{\rho_1}{\rho_2} \times \left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \quad \omega \to \infty \qquad (8.13)$$

Для волн, характеризуемых весьма малым значением параметра $\zeta = \rho_0\omega\tau/\rho_\infty$, справедливо асимптотическое выражение

$$\delta_a = \frac{\sqrt{\beta\rho_0}}{2}\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)\frac{\rho_1\rho_2 a_0}{m_0\rho_\infty\mu}\omega^2, \qquad (8.14)$$

т. е. коэффициент затухания волн первого рода δ_a пропорционален квадрату частоты колебаний. Выражение (8.14) можно непосредственно получить из формулы (7.11), если совершить в последней предельный переход к мягким средам.

Заметим, что характеристики продольных волн первого рода в мягких средах не зависят от упругих модулей переупаковки твердых частиц λ_1, λ_2, а определяются только сжимаемостью фаз β_1, β_2 и величиной пористости m_0. Однако продольные волны второго рода (как и поперечные волны) в мягких средах будут характеризоваться только параметрами λ_1, λ_2, а не β_1, β_2. Покажем это.

Для *продольных волн второго рода* справедливо следующее исходное соотношение:

$$\xi_b^2 = 1 - i\zeta^{-2}, \tag{8.15}$$

которое для волн, бегущих в положительном направлении оси x (в пренебрежении величинами порядка малости ε^2 и выше), можно представить в виде

$$\xi_b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\zeta^2}}+1\right)^{1/2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\zeta^2}}-1\right)^{1/2}. \tag{8.16}$$

Скорость распространения волны второго рода v_b определится по формуле

$$v_b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{B\rho}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\zeta^2}}+1\right)^{-1/2}. \tag{8.17}$$

Отсюда следуют два предельных выражения

$$v_b \to c = (B\rho)^{-1/2} \quad \text{при } \zeta \to \infty,$$

$$v_b \to 0 \quad \text{при } \zeta \to 0.$$

Коэффициент затухания для волн второго рода имеет вид

$$\delta_b = \omega \frac{\sqrt{B\rho}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\zeta^2}}-1\right)^{1/2} \tag{8.18}$$

и соответственно $\delta_b \to 0$ при $\zeta \to \infty$, $\delta_b \to \infty$ при $\zeta \to 0$ и при фиксированном ω, тогда как при фиксированном параметре $\rho a_0/\mu$ при $\omega \to 0$ имеем $\delta_b \to 0$, а при $\omega \to \infty$

$$\delta_b \to \frac{1}{2}\frac{\mu}{a_0}\sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{8.19}$$

Результаты расчетов по формуле (8.17) представлены на рис. 8.

Из приведенного здесь анализа следует, что величины v_b и δ_b обращаются в нуль (при некоторых значениях параметров среды и частоты) только в масштабе порядка единицы, так как, строго говоря, они могут быть величинами ε малого порядка.

Результирующие формулы (8.17), (8.18) соответствуют упрощенной модели пористой среды, сложенной из несжимаемых фаз ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) — см. [166].

При исследовании зависимости коэффициента затухания от частоты колебаний в волне удобно рассматривать связь безразмерной величины $U_b = (\rho^2 a_0^2 \delta_b^2)/(\mu^2 B\rho)$ и ζ^2 (рис. 9).

Значения параметра $\tau = (\rho_1\rho_2 a_0)(\mu m_0 \rho_0)^{-1}$, характерного времени релаксации (запаздывания) механического процесса, происходящего при распространении волн, для некоторых водонасыщенных грунтов приведены в табл. 4.

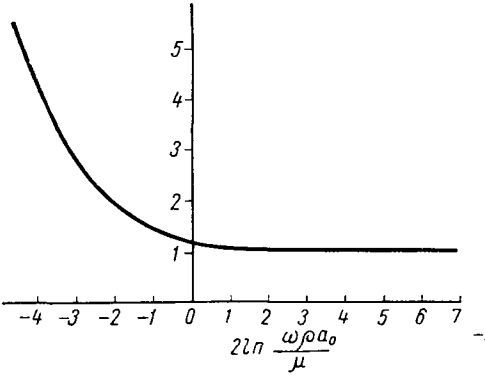


Рис. 8. Зависимость скорости v_b продольной монохроматической волны второго рода в мягкой насыщенной среде от частоты и параметров среды: $(v_0^2 B\rho)^{-1} = f(\omega\rho a_0 \mu^{-1})$.

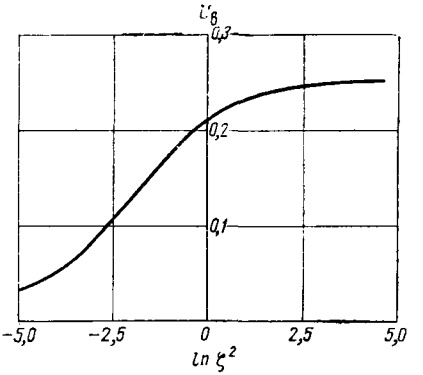


Рис. 9. Зависимость коэффициента затухания продольной монохроматической волны второго рода в мягкой насыщенной среде от частоты колебаний (при фиксированных параметрах среды).

С целью сравнительной оценки характерных скоростей v_0, v_∞ и c приведем данные подсчета для кварцевого песка ($m_0 = 0{,}3$, $\rho_1 = 2{,}5$ *г/см*^{3}, $\rho_2 = 1$ *г/см*^{3}, $\beta_1 = 2\cdot 10^{-6}$ *ат*$^{-1}$, $\beta_2 = 4\cdot 10^{-5}$ *ат*$^{-1}$, $B = 0{,}001$ *ат*$^{-1}$).

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho_0}} = 1{,}9 \text{ км/сек}, \quad v_\infty = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho_\infty}} = 2{,}2 \text{ км/сек},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{B\rho}} \approx 0{,}14 \text{ км/сек} \tag{8.20}$$

Для сейсмических волн в водонасыщенных грунтах параметр $\zeta = \rho_0\omega\tau/\rho_\infty$ оказывается (см. табл. 4) весьма малым, и для волн первого рода будет справедливо асимптотическое выражение (8.14).

Для волн сейсмических частот второго рода в силу малости параметра ζ при этом будет справедлива асимптотическая формула

$$\delta_b = \sqrt{\frac{\omega\mu B}{2a_0}}, \tag{8.21}$$

Таблица 4

Грунт	Коэффициент фильтрации по [181] $\frac{a_0\rho_2 m_0 g}{\mu(1-m_0)}$, *см/сек*	Пористость, m_0	Характерное время τ, *сек*
Песок чистый	$1{,}0—10^{-2}$	0,4—0,3	$2\cdot10^{-3}—3\cdot10^{-5}$
Песок глинистый . . .	$10^{-2}—5\cdot10^{-3}$	0,3—0,2	$3\cdot10^{-5}—2\cdot10^{-5}$
Супесок	$5\cdot10^{-3}—3\cdot10^{-3}$	0,2—0,1	$5\cdot10^{-5}—1{,}2\cdot10^{-5}$
Суглинок карбонатный	$1\cdot10^{-3}—5\cdot10^{-5}$	0,2—0,1	$2\cdot10^{-5}—5\cdot10^{-6}$
Глина	$6\cdot10^{-4}—5\cdot10^{-6}$	0,1—0,05	$5\cdot10^{-6}—10^{-7}$
Глина солонцеватая . .	$1\cdot10^{-6}—3\cdot10^{-7}$	0,1—0,05	$10^{-8}—6\cdot10^{-9}$

т. е. коэффициент затухания пропорционален корню квадратному из частоты ω. Деление соотношения (8.21) на (8.14) приводит к следующему результату:

$$\frac{\delta_b}{\delta_a} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{B\rho}}{\sqrt{\beta\rho_0}}\left(\frac{\mu}{\omega\rho a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)^{-1}, \qquad (8.22)$$

т. е. волне второго рода по сравнению с волной первого рода той же частоты свойственно неизмеримо большее затухание. Отсюда в насыщенных жидкостью грунтах практически могут распространяться только волны первого рода. В то же время в сухих грунтах отсутствуют волны первого рода и распространяются только волны второго рода. Действительно, там $\mu \to 0$, $\rho_2 \to 0$, т. е. $\zeta \to \infty$, $\delta_b \to 0$, $v_b \to c = 1/\sqrt{B\rho_1}$. Таким образом, выше уровня грунтовых вод скорость распространения наблюдаемых сейсмических волн равна $v_b = 1/\sqrt{B\rho_1}$, а ниже $v_b = v_0$, определяемой по формуле (8.8). Отсюда скорость распространения наблюдаемых продольных волн при переходе через зеркало грунтовых вод возрастает в N раз, где

$$N = \frac{v_a}{v_b} = \sqrt{\frac{B}{\beta_0}}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_0}}, \qquad (8.23)$$

что и подтверждается рядом наблюдений [129, 304, 305].

Это дает также объяснение приведенным в табл. 3 данным о величинах скоростей наблюдаемых продольных и поперечных волн. Становится ясным, что в мягких средах уплотнение пористой среды, которое не приводит к нарушению условия $\varepsilon \ll 1$, заметно влияет на скорости v_s и v_b, но практически не сказывается на скорости первой продольной волны v_a. Поэтому соотношение между скоростями продольных и поперечных сейсмических волн в слабо сцементированных ненасыщенных пористых средах примерно одинаково, тогда как при полном насыщении среды капельной жидкостью это соотношение резко меняется. Подчеркнем, что в сильно сцементированных средах скорость волны первого рода зависит также от коэффициентов Ламэ — см. формулу (7.10) — и увеличение степени сцементированности влияет на характер их распространения (см. § 10).

Рассмотрим подробнее механизм, определяющий дисперсию и затухание наблюдаемых продольных и поперечных волн в мягких насыщенных пористых средах.

Прежде всего заметим, что если потенциал волн Ф удовлетворяет обобщенному релаксационному акустическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-v_\infty^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-v_0^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (8.24)$$

(где τ — характерное время запаздывания; v_∞, v_0 — соответственно «замороженная» и «равновесная» скорости звука), то для скорости распространения монохроматической акустической волны частоты ω и ее коэффициента затухания будут справедливы соотношения [101]:

$$\frac{1}{v^2}=\frac{1}{2v_0^2}\left\{\left(\frac{1+\tau^2\omega^2}{1+v_\infty^4\tau^2\omega^2/v_0^4}\right)^{1/2}+\frac{1+v_\infty^2\tau^2\omega^2/v_0^2}{1+v_\infty^4\tau^2\omega^2/v_0^4}\right\}, \qquad (8.25)$$

$$\delta^2=\frac{1}{v_0^2}\frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{1+\tau^2\omega^2}{1+v_\infty^4\tau^2\omega^2/v_0^4}\right)^{1/2}-\frac{1+v_\infty^2\tau^2\omega^2/v_0^2}{1+v_\infty^4\tau^2\omega^2/v_0^4}\right\}. \qquad (8.26)$$

Сопоставление выражений (8.25), (8.26) с соотношениями (8.7) и (8.10) показывает, что формулы (8.7) и (8.10) следуют из (8.24), если $v_0=(\beta\rho_0)^{-1/2}$, $v_\infty=(\beta\rho_\infty)^{-1/2}$, $\tau=a_0\rho_1\rho_2(\mu m_0\rho_0)^{-1}$, $\rho=\rho_1\rho_2(m_0\rho_\infty)^{-1}$. Отсюда, в мягких средах волна первого рода определяется только суммой сжимаемости материала фаз. При этом каждая из фаз, находящаяся в элементарном макрообъеме, деформируется независимо от деформаций другой фазы, т. е. так, как если бы все пространство элементарного макрообъема было бы занято сплошным материалом рассматриваемой фазы. Это может быть при условии равенства фазовых напряжений. Таким образом, продольная волна первого рода в мягких пористых насыщенных средах является волной равных фазовых напряжений (*волной давления*).

Этот вывод согласуется с результатом § 5, где уравнение (8.24) было получено из общей линеаризованной системы уравнений методом инспекционного анализа (при $\Phi\equiv p$ — см. уравнение (5.29)). Там же отмечалось, что уравнение (5.29) есть эквивалент линеаризованной системы уравнений Х. А. Рахматулина [4, 98], которую — см. уравнение (5.23) — можно также представить в виде

$$\rho_0\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0,$$

$$\beta\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0,$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}-\frac{\rho_0}{\rho_\infty}\frac{\partial U_i}{\partial t}=\frac{U_i-V_i}{\tau}, \qquad (8.27)$$

где $V_i=(1-m_0)u_i+m_0w_i$, $\rho_0U_i=(1-m_0)\rho_1u_i+m_0\rho_2w_i$. Отсюда видно, что релаксация происходит в силу неравенства средних объемной V_i и массовой скорости U_i движения среды. При $\omega\tau\to 0$ звук будет распространяться со скоростью v_0 в условиях равенства объемной и массовой скоростей: $U_i=V_i$. При $\omega\tau\to\infty$ звук распространяется со скоростью v_∞, причем здесь $U_i\rho_0=V_i\rho_\infty$.

Нетрудно показать, что первое из условий эквивалентно условию равенства объемных фазовых скоростей $u_i = w_i$, а второе — равенству массовых скоростей фаз $\rho_1 u_1 = \rho_2 w_i$. Релаксация объясняется различием инерционных свойств фаз.

Выше (см. § 7) было показано, что система уравнений поперечных волн также сводится — см. уравнение (7.21) — к релаксационному уравнению (8.24) при замене Φ на ψ_k и при $v_{s0} = \sqrt{\lambda_2 (1 - m_0) \rho_0^{-1}}$, $v_{s\infty} = \sqrt{\lambda_2 \rho_2^{-1}}$, $\tau = \rho_1 \rho_2 a_0 \cdot (\mu m_0 \rho_0)^{-1}$. Различие в эффективной плотности среды при распространении поперечных волн объясняется тем, что минимальной скорости поперечных волн ($\omega\tau \to 0$) соответствует условие равенства объемных фазовых скоростей ($u_i = w_i$), но максимальной — обращение в нуль скорости жидкости ($w_i = 0$). Последнее связано с тем, что жидкость в рамках рассматриваемой модели не воспринимает касательных напряжений.

Таким образом, при динамических воздействиях на водонасыщенные грунты сообщенный импульс первоначально распределяется равномерно по всем фазам, которые воспринимают соответствующее напряжение. Среда приходит в неравновесное, «замороженное» состояние, которое реализуется при высоких частотах колебаний, когда обмен импульсом между фазами не успевает произойти. Механизм объемных сил взаимодействия за характерное время релаксации τ приводит среду в равновесное состояние. Равновесие характеризуется условием равенства нулю межфазного взаимодействия и реализуется при низких частотах колебаний, когда обмен импульсом совершается как бы мгновенно.

В 1954 г. Шамбрэ [235] предложил вывод формулы для скорости плоских волн в двухфазной смеси. Он фактически принял гипотезу о равенстве давлений в фазах и неизменности состава смеси. Последнее, как легко видеть, означает равенство фазовых скоростей. Воспользовавшись лагранжевой системой координат, связанной с частицей неизменного состава, Шамбрэ получил следующее эффективное выражение для скорости звука:

$$v_0 = \frac{1}{(\beta_1 (1 - m_0) + \beta_2 m_0)(\rho_1 (1 - m_0) + \rho_2 m_0)}, \qquad \beta_i = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial p} = \frac{1}{\rho_i c_i^2}, \tag{8.28}$$

где c_i — скорость звука в чистой i-ой фазе.

Шамбрэ считает, что формула (8.28) справедлива для возмущения произвольной амплитуды, тогда как в предыдущих работах Вуда [329] и Урика [321] соотношение (8.28) выводилось только для возмущений бесконечно малой амплитуды, причем соотношение $\beta = \beta_1 (1 - m_0) + \beta_2 m$ принималось без обоснования.

Г. М. Ляхов [133—135] в своих исследованиях ударных волн в многокомпонентных средах также принимал гипотезу о равенстве фазовых напряжений, а также предполагал равенство фазовых объемных скоростей. Полученные результирующие формулы [1] (см. § 18) Г. М. Ляхов применял к грунтам как

[1] Для случая полностью насыщенных сред они переходят в формулы (8.28).

полностью насыщенных, так и при наличии защемленного воздуха. Таким образом, строго говоря, исследования Г. М. Ляхова применимы к мягким грунтам при весьма малом содержании воздуха (сжимаемость фаз должна быть существенно меньше сжимаемости переупаковки — см. § 9), причем инерционная релаксация выпадала из рассмотрения — рассматривалось только равновесное состояние среды. Поэтому сохранение различных фазовых скоростей в модели, как это было предложено Х. А. Рахматулиным [186], приводит к более общим результатам.

Система уравнений Х. А. Рахматулина использовалась для анализа звуковых волн в работе [98]. Ее автор Я. З. Клейман рассматривает плоские периодические волны, распространяющиеся в среде, от источника гармонических колебаний, помещенного в начало координат $x = 0$ и меняющего в этой точке давление по закону $p\ (0,\ t) = A \cos \omega t$. При этом отмечено, что при весьма больших частотах скорость и коэффициент затухания не меняются с частотой.

Согласно приведенному здесь анализу эти результаты применимы в некотором диапазоне частот (см. § 11) для продольных волн первого рода в мягких пористых средах.

Уравнение (8.24) аналогично уравнению распространения звука в релаксирующем газе (из-за химической реакции замедленного возбуждения степеней свободы частиц и т. д.). Аналогия релаксации в гетерогенной среде, порождаемой различием инерционных свойств фаз (на примере взвешенных инородных частиц в жидкости и самой жидкости), с релаксацией, определяемой существованием неравновесного параметра состояния в многоатомных газах, по свидетельству работы [194], была установлена акад. Л. И. Мандельштамом. В связи с этим заметим, что в достаточно разбавленных суспензиях каждая взвешенная частица окружена частицами жидкой фазы, взвешенные частицы не контактируют друг с другом. Поэтому для таких сред допустима математическая двухфазная модель (см. § 3), согласно которой средние фазовые давления равны. Таким образом, здесь будут справедливы условия, приближенно выполняющиеся в волне давления в мягких насыщенных грунтах и горных породах. Воспользовавшись этим, сразу можно сделать вывод о том, что выражения (8.25)—(8.26) выполняются для продольных волн в разбавленных суспензиях. Используемые в выражении (8.26) значения v_0, v_∞, как отмечалось при анализе формулы (7.19), были выписаны именно для суспензий Геертсмой и Смитом [293]. Заметим также, что, например, соотношение (8.25) можно переписать в виде

$$v^2 = \frac{v_0^4 + v_\infty^4 \tau^2\omega^2}{v_0^2 + v_\infty^2 \tau^2\omega^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{(v_\infty^2 - v_0^2)\,\tau^2\omega^2}{(v_0^2 + v_\infty^2\tau^2\omega^2)^2}}} \tag{8.29}$$

и оно перейдет в выражение типа (7.18) Геертсмы и Смита при $v_0^2 + v_\infty^2\tau^2\omega^2 \gg (v_\infty - v_0^2)\,\tau^2\omega^2$. Это условие может нарушаться при промежуточных значениях $\tau\omega$, но выполняется при $\tau\omega \to 0$ и при $\tau\omega \to \infty$. Поэтому из соотношения (8.39) Геертсма и Смит получили правильные асимптотические выражения для v_0 и v_∞.

Анализ характера поперечных колебаний в разбавленных суспензиях твердых частиц в вязкой жидкости требует учета собственного вращения взвешенных частиц, что связано с введением методов асимметричной гидромеханики [1].

Рассмотрим теперь относительно медленные динамические процессы в мягких насыщенных средах (или же суспензиях), когда $T \gg \tau$ (T — характерное время процесса). Для изучения таких процессов (например, звука малых частот) можно воспользоваться «вязкостным приближением» Л. И. Мандельштама и М. А. Леонто-

[1] См. примечание на стр. 280.

вича [119, 138]. Согласно этому приближению релаксация из-за химических реакций и т. д., описываемая введением дополнительного неравновесного параметра состояния, объясняет аномально высокую объемную вязкость некоторых однородных жидкостей.

Воспользовавшись методом инспекционного анализа, можно показать, что при $T \gg \tau$ волновое релаксирующее уравнение (8.24) практически переходит в уравнение вида

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - v_0^2 \nabla^2 p - \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p = 0, \quad \eta = \rho_0 \tau (v_\infty^2 - v_0^2), \tag{8.30}$$

что соответствует представлению среды в виде однородной жидкости с эффективным коэффициентом объемной сжимаемости β, плотностью ρ_0 и имеющей объемную вязкость η. Таким образом, для больших характерных времен мягкий грунт подобен вязкой жидкости, т. е. как и при релаксации, рассмотренной Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем, суспензии (и мягкие грунты) вследствие различий плотности будут иметь объемную вязкость

$$\eta = \frac{\tau}{\beta} \left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1 \right). \tag{8.31}$$

§ 9. РОЛЬ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА. МЯГКИЕ СРЕДЫ

Предварительно рассмотрим распространение звуковых волн в таких средах (например, эмульсиях), у которых различие плотностей фаз несущественно, но значительна разница тепловых параметров [93]. При этом можно считать равными фазовые скорости и давления, но фазовые температуры T_1 и T_2 необходимо сохранить различными. Тогда из системы уравнений (5.I)—(5.VII) следует линейная система уравнений:

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \tag{9.1}$$

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} - (1 - m_0) \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - m_0 \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{9.2}$$

$$(1 - m_0) c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} + m_0 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha T_0 \frac{\partial p}{\partial t} \tag{9.3}$$

$$(1 - m_0) c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = (1 - m_0) \alpha_1 T_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \varkappa (T_2 - T_1), \tag{9.4}$$

где T_1, T_2 — возмущения температур фаз относительно стационарной температуры T_0; α_1, α_2 — коэффициенты объемного расширения фаз, $\alpha = (1 - m_0) \alpha_1 + m_0 \alpha_2$; β — суммарный коэффициент сжимаемости фаз; c_1, c_2 — теплоемкости фаз; $\varkappa$ — интенсивность межфазового теплообмена.

В уравнениях (9.1)—(9.4) пренебрегается теплопроводностью фаз по сравнению с теплообменом.

Система уравнений (9.1)—(9.4) сводится к уравнению типа (8.24) относительно давления

$$\tau_T \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \theta_\infty}\nabla^2 p\right) + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 \theta_0}\nabla^2 p\right) = 0, \tag{9.5}$$

$$\theta_0 = \beta - T_0 \frac{\alpha^2}{c}, \quad \theta_\infty = \beta - T_0\left(\frac{1-m_0}{c_1}\alpha_1^2 + \frac{m_0}{c_1}\alpha_2^2\right),$$

$$\tau_T = \frac{m_0(1-m_0)}{\varkappa}\frac{\theta_\infty}{\theta_0}\frac{c_1 c_2}{C}, \quad C = (1-m_0)c_1 + m_0 c_2.$$

Можно показать [311], что согласно формулам (9.5) минимальная скорость звука, соответствующая условию $\omega\tau_T \to 0$, получается из двухфазной модели при $T_1 = T_2$, а максимальная ($\omega\tau_T \to \infty$) при равенстве $(c_1/\alpha_1)\, T_1 = (c_2/\alpha_2)\, T_2$.

Таким образом, как и при инерционной релаксации, тепловая релаксация в гетерогенных средах связана с тем, что при высоких частотах колебаний (малых характерных временах) вызываемая равномерным распределением импульса разница (из-за различных параметров α_1, c_i) температур не успевает выравняться. При малых частотах колебаний обмен теплом (как и обмен импульсом) происходит как бы мгновенно.

Рассмотрим совместный эффект температурной и инерционной релаксации при процессе распространения термоупругих волн в пористых насыщенных средах. Прежде всего отметим, что тепловое расширение фаз носит гидростатический характер, т. е. изменение температуры влияет только на объемные деформации фаз. Поэтому волны поперечного сдвига при учете межфазового теплообмена распространяются по тем же законам (см. § 7), как и в термически неактивных насыщенных пористых средах.

Введение скалярных φ_1, φ_2 и векторных $\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$ потенциалов смещения в линеаризованные уравнения (см. § 5) движения (5.I), (5.II), неразрывности (5.III), (5.IV) и энергии фаз (5.V), (5.VI) приводит к следующей системе уравнений, описывающих закономерности распространения объемных волн [76, 83]:

$$(1-m_0)\rho_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\mu m_0^2 (1-m_0)}{a_0}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right) - \frac{1-m_0}{B} \times$$

$$\times \nabla^2 \varphi_1 + np + (1-m_0)\alpha_1 K T_1 = 0, \tag{9.6}$$

$$m_0 \rho_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + m_0 p + \frac{\mu m_0^2 (1-m_0)}{a_0}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right) = 0, \tag{9.7}$$

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + m_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \varphi_2) + n \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \varphi_1) - n\alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - m_0 \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \tag{9.8}$$

$$(1-m_0)c_1\left(1 - \frac{\alpha_1^2 K T_0}{c_1}\right)\frac{\partial T_1}{\partial t} = -(1-m_0)\alpha_1 K T_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \varphi_1) +$$

$$+n\alpha_1 T_0 \frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa (T_1 - T_2), \tag{9.9}$$

$$m_0 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = m\alpha_2 T_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \varkappa (T_1 - T_2), \tag{9.10}$$

где $\beta = n\beta_1 + m_0\beta_2$, $n = (1 - m_0)(1 - \beta_1 K)$, тогда, как и следовало ожидать, уравнения для потенциалов волн поперечного сдвига совпадают с уравнениями (7.21).

В уравнениях энергии (9.9)—(9.10) пренебрегается (по сравнению с межфазовым теплообменом) теплопроводностью по фазам, т. е. членами $(1 - m_0)\, D_1 \nabla^2 T_1$, $m_0 D_2 \nabla^2 T_2$, что оправдано для волн не слишком малой частоты, порождаемых механическим воздействием, когда тепло выделяется за счет деформации материала фаз. Уравнения (9.6)—(9.10) были выписаны и проанализированы (см. последующие результаты) по предложению автора П. П. Золотаревым.

Ограничимся теперь изучением плоских монохроматических волн: $\varphi_k = \varphi_k^0 \exp(i\eta x - i\omega t)$, $T_k = T_k^0 \exp(i\eta x - i\omega t)$ и снова остановимся сначала на примере слабо сцементированной пористой среды $\varepsilon = \beta_1/B \sim \beta_1 K \ll 1$, $\beta_1 \sim \beta_2$. Пренебрегая ε — малыми слагаемыми (по сравнению с единицей), получим из системы (9.6)—(9.10) следующее дисперсионное уравнение:

$$\xi^4 - \left(1 + \frac{i}{\zeta}\right)\xi^2 + \frac{\beta}{B}\left(R_1(\zeta, h) + \frac{i}{\zeta} R_2(\zeta, h)\right) = 0, \tag{9.11}$$

$$R_1 = A(h) - \frac{1}{\zeta} B_*(h), \quad R_2 = \frac{\rho_0}{\rho_\infty} A(h) + \zeta \frac{\rho_\infty}{\rho_0} B_*(h),$$

$$A(h) = \frac{\rho_\infty \theta_\infty}{\rho} \frac{(\theta_0/\theta_\infty) + h^2}{\beta(1+h)^2}, \quad B_*(h) = \frac{\rho_0 \theta_\infty}{\rho\beta} h \frac{(\theta_0/\theta_\infty) - 1}{1 + h^2},$$

$$\zeta = \frac{\rho a_0}{\mu}\omega = \frac{\rho_0}{\rho_\infty}\tau\omega, \quad h = \frac{m_0(1 - m_0)\, c_1 c_2}{\varkappa c}\omega = \tau_T \omega \frac{\theta_0}{\theta_\infty},$$

$$\xi = \frac{\eta}{\omega} \frac{1}{\sqrt{B\rho}}.$$

Согласно уравнению (9.11) возможны два рода волн, однако наблюдаемыми сейсмическими волнами являются волны первого рода, описываемые дисперсионным уравнением

$$\xi_a^2 = \varepsilon\left(\frac{R_1\zeta^2 + R_2}{1 + \zeta^2} - i\frac{(R_1 - R_2)\zeta}{1 + \zeta^2}\right), \tag{9.12}$$

совпадающим по форме с уравнением (8.5). Уравнению (9.12) соответствуют следующие формулы для скорости распространения v_a и коэффициента затухания δ_a:

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta}} \sqrt{\frac{1 + \zeta^2}{R_1\zeta^2 + R_2}}, \tag{9.13}$$

$$\delta_a = \omega \frac{\sqrt{\beta\rho}}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1\right) A(h)\, \zeta}{\sqrt{(1 + \zeta^2)(R_1\zeta^2 + R_2)}} + \frac{\left(1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_0}\zeta^2\right) B_*(h)}{\sqrt{(1 + \zeta^2)(R_1\zeta^2 + R_2)}}\right\}, \tag{9.14}$$

справедливые для волн неслишком больших частот (при больших частотах теплообмен между фазами перестает быть пропорциональным разности температур, так же как сила межфазового взаимодействия — разности скоростей смещения фаз — см. § 11). Тем не менее формула (9.13) дает правильное предельное значение скорости v_a при $\omega \to \infty$:

$$\begin{aligned} v_a &\to v_\infty = (\rho_\infty \theta_\infty)^{-1/2} \text{ при } \omega \to \infty, \\ v_a &\to v_0 = (\rho_0 \theta_0)^{-1/2}, \text{ при } \omega \to 0. \end{aligned} \tag{9.15}$$

При $\zeta \ll 1$, $h \ll 1$ из формулы (9.14) получается упрощенное выражение для коэффициента затухания

$$\delta_a = \frac{1}{2v_0}\left\{\frac{\rho_0 - \rho_\infty}{\rho_\infty}\tau + \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta_0}\tau_T\right\}\omega^2. \tag{9.16}$$

Если $\theta_0/\theta_\infty = 1$, то $A(h) = \rho_\infty/\rho$, $B(h) = 0$, температурная релаксация отсутствует и формула (9.14) переходит в выражение:

$$\delta_a = \omega\frac{\sqrt{\beta\rho}}{2}\frac{\zeta(\rho_0/\rho_\infty - 1)\rho_\infty/\rho}{\sqrt{(1+\zeta^2)(\zeta^2\rho_\infty/\rho + \rho_0/\rho)}}. \tag{9.17}$$

В отсутствие инерционной релаксации ($\rho_1 = \rho_2$) имеем $\rho_0 = \rho_\infty$, и коэффициент затухания определяется только тепловыми эффектами — см. уравнение (9.5) —

$$\delta_a = \frac{(\theta_0 - \theta_\infty)h^2}{2v_\infty\tau_T\theta_\infty\sqrt{\left(\frac{\theta_0}{\theta_\infty} + h^2\right)(1+h^2)}}, \tag{9.18}$$

$$v_\infty = \frac{1}{\rho_0\theta_\infty}, \quad v_0 = \frac{1}{\rho_0\theta_0}. \tag{9.19}$$

Уравнения, описывающие распространение волн первого рода, совпадают с упрощенными уравнениями распространения звука в смесях при совместном учете тепловой и инерционной релаксации [81].

М. А. Исакович [93] изучал закономерности акустических волн в простейшей модели смеси со «слоистым» вдоль фиксированной оси распределением фаз по пространству при мощности чередующихся слоев в $2l_1$ и $2l_2$, т. е. вполне аналогичной модели, принятой Ю. В. Ризниченко [190] для анализа ультразвуковых волн в гетерогенных сплошных средах (см. § 11). Однако, если в работе [190] исследовалась инерционная релаксация, то М. А. Исакович рассматривал только эффект теплообмена и нашел точные выражения для v и δ. Предельные значения v_0, v_∞, как и следовало ожидать, совпали с выражениями (9.19).

В частном случае $l_1 = l_2 = l$ (т. е. $m_0 = 0{,}5$), $a_1 = a_2 = a$ (коэффициенты температуропроводности материала фаз равны), $c_1 = c_2 = C$ (теплоемкости фаз равны), но $\alpha_1 \neq \alpha_2$ дает для коэффициента δ_a зависимость, полностью аналогичную зависимости, представленной формулой (9.18), если $\tau_T = (l^2/3a)$. Следовательно, для такой модели $\varkappa = 3D/4l^2$, $D = ac$.

Рассмотренные ранее уравнения распространения упругих волн в двухфазных пористых средах нетрудно обобщить на случай трехфазной пористой среды, состоящей из твердой, жидкой и газообраз-

ной фаз. Соответствующее, приведенное в § 5, построение (без изучения тепловых эффектов) было выполнено в работе [265].

Линеаризованные уравнения неразрывности для каждой из фаз рассматриваемой системы (твердые частицы, жидкость, газ) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial m_1}{\partial t}+m_1^0\frac{\partial \Pi_1}{\partial t}+m_1^0\operatorname{div}\vec{u}=0,\quad \Pi_1=\frac{\rho_1}{\rho_1^0},\\
&\frac{\partial m_2}{\partial t}+m_2^0\frac{\partial \Pi_2}{\partial t}+m_2^0\operatorname{div}\vec{w}=0,\quad \Pi_2=\frac{\rho_2}{\rho_2^0},\\
&\frac{\partial m_3}{\partial t}+m_3^0\frac{\partial \Pi_3}{\partial t}+m_3^0\operatorname{div}\vec{v}=0,\quad \Pi_3=\frac{\rho_3}{\rho_3^0},
\end{aligned} \tag{9.20}$$

где $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\vec{v}$ — скорости частиц твердой, жидкой и газообразной фаз; m_i^0 — первоначальное содержание каждой из фаз в единице объема среды ($m_1+m_2+m_3=1$); ρ_i^0 — начальные значения плотностей фаз; m_i, ρ_i — возмущение соответствующих величин.

Суммируя уравнения (9.20), получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Pi}{\partial t}+m_1^0\operatorname{div}\vec{u}+m_2^0\operatorname{div}\vec{w}+m_3^0\operatorname{div}\vec{v}=0,\\
\Pi=m_1^0\Pi_1+m_2^0\Pi_2+m_3^0\Pi_3.
\end{gathered} \tag{9.21}$$

Будем считать, что в каждой точке давление в жидкой и газообразной фазах одинаково (капиллярными силами пренебрегается), а сила трения действует между твердой и жидкой, а также между твердой и газовой фазами и пропорциональна разности скоростей соответствующих фаз.

Из опытных данных о фазовых проницаемостях [227] известно, что газовая фаза неподвижна относительно частиц твердой фазы, если $S_0=m_3^0/(m_3^0+m_2^0)$ не превосходит значения 0,1—0,2.

Примем, что содержание газообразной фазы относительно мало: $S_0<0{,}1-0{,}2$, т. е. будем рассматривать пористую среду с защемленным газом [83].

Тогда уравнения (9.21) и уравнения движения (5.11) сведутся к следующим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t}+m_1^0\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+m_2^0\frac{\partial w_i}{\partial x_i}=0, \tag{9.22}$$

$$m_1^0\rho_1^0\frac{\partial u_i}{\partial t}=m_1^0\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+r(w_i-u_i),$$

$$m_2^0\rho_2^0\frac{\partial w_i}{\partial t}=-m_2^0\frac{\partial p}{\partial x_i}-r(w_i-u_i),$$

где использованы соотношения $m_1^0\gg m_3^0$, $\rho_1^0\gg\rho_2^0$.

Для коэффициента трения $r=r_{s1}$ справедлива формула (5.12) при $f_2(S)\approx 1$.

В рассматриваемой трехфазной среде температуры каждой из фаз будут, вообще говоря, различными. Поэтому здесь нужно выписывать три уравнения сохранения энергии. В линеаризованном виде они, как нетрудно показать, должны записываться следующим образом:

$$m_1^0 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = m_1^0 D_1 \nabla^2 T_1 - m_1 T_0 \alpha_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varkappa_{12}(T_2 - T_1) + \varkappa_{13}(T_3 - T_1),$$

$$m_2^0 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = m_2^0 D_2 \nabla^2 T_2 + m_2 T_0 \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa_{12}(T_2 - T_1) + \varkappa_{23}(T_3 - T_2), \tag{9.23}$$

$$m_3^0 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = m_3^0 D_3 \nabla^2 T_3 + m_3^0 T_0 \alpha_3 \frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa_{13}(T_3 - T_1) - \varkappa_{23}(T_3 - T_2),$$

где $\varkappa_{13}$, $\varkappa_{23}$, $\varkappa_{12}$ — коэффициенты соответствующего межфазового теплообмена, которые нужно определять по данным опыта.

Принимая во внимание, что плотность твердой фазы зависит от среднего истинного напряжения σ и T, а плотности жидкой и газообразной фаз соответственно от p, T_2; p, T_3, линеаризованные уравнения состояния запишем в следующем виде:

$$\Pi_1 = -\beta_1 \sigma - \alpha_1 T_1, \quad \Pi_2 = \beta_2 p - \alpha_2 T_2, \quad \Pi_3 = \beta_3 p - \alpha_3 T_3. \tag{9.24}$$

Связь между напряжениями и деформациями в скелете, как нетрудно видеть, будет такой же, как и для двухфазной среды

$$\sigma_{ij}^f = m_1^0 (\lambda_1 e \delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}) + m_1^0 \beta_1 K p \delta_{ij} - \alpha_1 m_1^0 K T_1 \delta_{ij}, \tag{9.25}$$

так как давления в жидкой и газообразной фазах принимаются одинаковыми (возмущения давления предполагаются малыми по сравнению с начальным давлением). Здесь учтено возникновение деформации твердой фазы из-за ее теплового расширения [76].

Рассмотрим теперь распространение продольных периодических волн в исследуемой среде. При этом снова ограничимся случаем мягких ($\beta_1/B \sim \beta_1 K \ll 1$) пористых сред, в которых газовая фаза неподвижна, и будем дополнительно предполагать, что

$$\beta K \sim \frac{\beta}{B} \ll 1, \quad \beta = m_1^0 \beta_1 + m_2^0 \beta_2 + m_3^0 \beta_3. \tag{9.26}$$

Оценим, при каком содержании газа в единице объема среды выполняется условие (9.26). Пусть $\beta_1 \approx 5 \cdot 10^{-6}\ am^{-1}$, $\beta_2 \approx 4 \cdot 10^{-5}\ am^{-1}$, $\beta_3 \approx 0{,}8\ am^{-1}$, $K \sim 1/B \sim 10\text{—}10^2\ am$. При этом условие $\beta K \ll 1$ достаточно хорошо выполняется соответственно при $m_3^0 \sim 10^{-2}\text{—}10^{-3}$.

Как отмечалось ранее, в насыщенных жидкостью пористых средах могут распространяться волны двух типов — волны первого и второго родов, причем в мягкой пористой среде в волне первого рода $\sigma \approx -p$. Физически ясно, что в рассматриваемом случае также будет две продольные волны, причем, если выполнено условие (9.26), то для первой волны тоже $\sigma \approx -p$.

Таким образом, чтобы получить уравнения, описывающие первую (акустическую) волну из уравнений (9.23), (9.24), (9.25), нужно в них

заменить σ на $-p$. Кроме того, для рассматриваемой среды можно сделать еще одно упрощение. Так как давления в каждой из фаз одинаковы и термические характеристики жидкой и твердой фаз близки между собой, то в первом приближении температуры этих фаз можно принять одинаковыми. Тогда уравнения (9.23) запишутся так:

$$(m_1^0 c_1 + m_2^0 c_2)\frac{\partial T_1}{\partial t} = (m_1^0 D_1 + m_2^0 D_2)\nabla^2 T_1 + \\ + (m_1^0 \alpha_1 + m_2^0 \alpha_2) T_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \varkappa (T_2 - T_1), \tag{9.27}$$

$$m_3^0 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = m_3^0 D_3 \nabla^2 T_3 + m_3^0 T_0 \alpha_3 \frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa (T_2 - T_1), \tag{9.28}$$

где $\varkappa = \varkappa_{13} + \varkappa_{23}$.

Если теперь предположить, что все зависимые переменные пропорциональны $\exp(i\eta x - i\omega t)$ и пренебречь в уравнениях (7.16) членами $(m_1^0 D_1 + m_2^0 D_2)\nabla^2 T_1$, $m_3^0 D_3 \nabla^2 T_2$, то получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\eta^2}{\rho\beta\omega^2} = \frac{Q_1\zeta^2 + Q_2}{1+\zeta^2} - i\frac{(Q_1 - Q_2)\zeta}{1+\zeta^2}, \tag{9.29}$$

$$\zeta = \tau_1\omega = \frac{m_1 m_2^0}{r}\rho\omega, \quad h = \frac{m_3 (m_1 c_1 + m_2 c_2) c_3}{\varkappa C}\omega = \tau_T \omega,$$

$$Q_1(\zeta, h) = A(h) - \frac{1}{\zeta} B_*(h), \quad Q_2(\zeta, h) = \frac{\rho_0}{\rho_\infty} A(h) + \zeta \frac{\rho_\infty}{\rho_0} B(h),$$

$$A(h) = \frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\theta_\infty}{\beta}\frac{1}{1+h^2}\left(\frac{\theta_0}{\theta_\infty} + h^2\right), \quad B_*(h) = \frac{\rho_0}{\rho_\infty}\frac{\theta_\infty}{\beta} h \frac{(\theta_0/\theta_\infty) - 1}{1+h^2},$$

$$\beta = m_1^0\beta_1 + m_2^0\beta_2 + m_3^0\beta_3, \quad \alpha = m_1^0\alpha_1 + m_1^0\alpha_2 + m_3^0\alpha,$$

$$v_0^2 = \frac{1}{\rho_0\theta_0}, \quad \theta_0 = \beta\left(1 - \frac{T_0\alpha^2}{\beta C}\right),$$

$$\theta_\infty = \beta\left(1 - \frac{T_0 (m_1^0\alpha_1 + m_2^0\alpha_2)^2}{\beta (m_1^0 c_1 + m_2^0 c_2)} - \frac{m_3^0 T_0 \alpha_3^2}{\beta c_3}\right)$$

$$v_\infty^2 = \frac{1}{\beta_\infty \rho_\infty}, \quad \frac{1}{\rho_\infty} = \frac{m_1^0}{\rho_1} + \frac{m_2^0}{\rho_2}, \quad \rho = \rho_1 + \frac{m_1^0}{m_2^0}\rho_2, \quad \rho_0 = m_1^0\rho_1 + m_2^0\rho_2.$$

Из выражения (7.17) получаем для скорости распространения и коэффициента затухания акустической волны следующие выражения:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta}}\sqrt{\frac{1+\zeta^2}{Q_1\zeta^2 + Q_2}}, \tag{9.30}$$

$$\delta = \omega\frac{\sqrt{\rho\beta}}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1\right)A(h)\zeta}{\sqrt{(1+\zeta^2)(Q_1\zeta^2 + Q_2)}} + \frac{\left(1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_0}\zeta^2\right)B_*(h)}{\sqrt{(1+\zeta^2)(Q_1\zeta^2 + Q_2)}}\right\}. \tag{9.31}$$

Соответственно при $\omega \to \infty$ имеем $v \to v_\infty$, а при $\omega \to 0$ $v \to v_0$. Далее при $\zeta \ll 1$, $h \ll 1$

$$\delta \approx \frac{1}{2v_0}\left(\frac{\rho_0-\rho_\infty}{\rho_0}\tau_1+\frac{\theta_0-\theta_\infty}{\theta_0}\tau_T\right)\omega^2. \tag{9.32}$$

Оценим для рассматриваемой трехфазной среды величину

$$\psi = \frac{\dfrac{\theta_0-\theta_\infty}{\theta_0}\tau_T}{\dfrac{\rho_0-\rho_\infty}{\rho_0}\tau_1}, \tag{9.33}$$

являющуюся отношением тепловой части коэффициента затухания к вязкостной для низких сейсмических частот.

Пусть $\rho_1^0 = 2{,}8$ *г/см*^{3}, $\rho_2^0 = 1$ *г/см*^{3}, $\rho_3^0 = 1{,}3\cdot10^{-3}$ *г/см*^{3}, $m_1^0 \approx 0{,}8$, $m_2^0 \approx$ $\approx 0{,}2$, $m_3^0 = 0{,}02$, $\alpha_1 = 5\cdot10^{-5}$ 1/°C, $\alpha_2 = 2\cdot10^{-4}$ 1/°C, $\alpha_3 = 3{,}7\cdot10^{-3}$ 1/°C, $c_1 = 0{,}56$ *кал/(см*$^3\cdot$*град)*, $c_2 = 1$ *кал/(см*$^3\cdot$*град)*, $c_3 = 3\cdot10^{-4}$ *кал/(см*$^3\cdot$*град)*, $\beta_1 =$ $= 5\cdot10^{-6}$ *см*^{2}*/кг*, $\beta_2 = 4\cdot10^{-5}$ *см*^{2}*/кг*, $\beta_3 = 0{,}8$ *см*^{2}*/кг*.

Пусть $\tau_1 \approx d^2/\nu$, $\tau_T \approx d^2/a_3 d$ — характерный размер поры, пузырек газа занимает всю пору [113, 384]. Здесь $\nu \approx 10^{-2}$ *см*^{2}*/сек* — кинетическая вязкость воды и $a_3 \approx 10^{-1}$ *см*^{2}*/сек* — температуропроводность газа. Тогда получим $\psi \approx 20\%$.

Сама величина δ при фиксированной частоте ω с изменением m_3^0 не остается постоянной [1]. С увеличением m_3^0, как видно из уравнения (9.32), δ возрастает, ибо v_0 уменьшается. Можно отметить также, что без учета влияния температуры $v_\infty = 1/\sqrt{\rho_\infty m_3^0 \beta_3}$, а с учетом $v_\infty^T = 1/\sqrt{\rho_\infty m_3^0 \beta_3 \gamma_3^{-1}}$. Следовательно, $v_\infty^T = v_\infty \sqrt{\gamma_3}$.

В заключение подчеркнем, что в присутствии защемленного газа лишь при весьма малом его содержании выдерживается условие равенства напряжений в фазах в первой волне — см. условие (9.27).

§ 10. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В СЦЕМЕНТИРОВАННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Аналитически исследовать закономерности распространения периодических акустических волн в произвольно сцементированных пористых средах труднее, нежели в мягких пористых средах, однако при этом удается относительно просто определить предельные значения скоростей волн при $\omega \to 0$ и при $\omega \to \infty$.

Первую из этих предельных скоростей можно найти из системы уравнений (9.6)—(9.10), если воспользоваться методом Я. И. Френ-

[1] Экспериментальные данные о характере волн в трехфазной среде опубликованы в статье П. С. Пархоменко «О зависимости затухания упругих волн от частоты в песке». Изв. АН СССР, Физика Земли, № 8, 1967.

келя [215], изложенным в § 7. Эта скорость определяется выражением [83]

$$v_0 = \sqrt{\frac{\left[(n+m)+\frac{(1-m_0)\,\alpha_1\alpha_* T_0}{\beta_1 C}\beta_1 K\right]^2 + \cdots \rightarrow}{\rho_0\theta_0}} \rightarrow \cdots \sqrt{\frac{+\frac{1-m_0}{B}\,\theta_0\left(1+\frac{(1-m_0)\,\alpha_1^2 T_0 B K^2}{C}\right)\chi}{\rho_0\theta_0}},$$

$$\theta_0 = \beta\left(1 - T_0\frac{\alpha^2}{C\beta}\right), \quad \chi = \left(1 - \frac{\alpha^2\beta}{B}\right), \tag{10.1}$$

где $\alpha_* = n\alpha_1 + m\alpha_2$; $C = nc_1 + mc_2$; остальные обозначения прежние, стр. 83.

Второе предельное значение скорости волны (при $\omega \to \infty$) совпадает — ср. уравнение (5.20) и (8.9) — со скоростью распространения фронта волны первого рода, а потому ее можно определить, если, например, записать уравнения (5.1)—(5.VI), (5.VII) для одномерного движения и вычислить скорости распространения характеристик. Тогда для v_∞ получим выражение [78]:

$$v_\infty = \frac{1}{\sqrt{\rho_* B}}\sqrt{\frac{(r+\varepsilon_* f)+\sqrt{(r+\varepsilon_* f)^2 - 4\varepsilon_* r\,\frac{1-m}{n}\,\frac{\rho_1}{\rho_*}}}{2\varepsilon_*\,\frac{1-m}{n}\,\frac{\rho_1}{\rho_*}}}, \tag{10.2}$$

$$\rho_* = \rho_1 + \frac{n}{m}\rho_2, \quad r = \frac{m(1-m)\,\rho_*}{\rho_2 n}, \quad \varepsilon_* = \frac{\theta_*}{B},$$

$$\theta_* = \beta\left(1 - \frac{n^2\alpha_1^2 T_0}{(1-m)\,c_1\beta} - \frac{m\alpha_2^2 T_0}{c_2\beta}\right), \quad f = \frac{1-m}{n}\left(1 - \frac{\beta_1}{\theta_*}nKB\right).$$

Используем зависимости (10.1)—(10.2) для оценки дисперсии упругих волн в пористых пластах, насыщенных водой и нефтью, что важно для метода прямых сейсмических поисков месторождений нефти и газа [152], сейсмокаротажа скважин и для определения параметров пластов по наблюдениям за сейсмическими волнами.

В табл. 5 приведены заимствованные из книги [152] исходные характеристики физических свойств частиц скелета, воды и нефти в пластовых условиях.

Таблица 5

Вещество	ρ, $г/см^3$	$\beta\cdot 10^5$, $атм^{-1}$	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$\alpha\cdot 10^5$, $1/^\circ C$	c_p, $кал/г\cdot град$	μ, $спз$
Нефть (в пластовых условиях) . . .	0,87	8,1	1,25	73	0,32	2,5
Вода	1,0	4,4	1,01	20	1,0	1,0
Частицы скелета	2,65	0,3	1,0	3	0,18	—

По формулам (10.1)—(10.2) с использованием данных табл. 5 были вычислены [83] значения предельных скоростей v_0, v_∞ распространения первой продольной волны, причем параметру сцементированности придавались следующие значения: $K\beta_1 = \varepsilon \ll 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Было принято, что пористость $m = 0{,}2$. Результаты подсчетов приведены в табл. 6.

Таблица 6

Среда	Скорость, м/сек	$\varepsilon \ll 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}2$	$\varepsilon = 0{,}3$	$\varepsilon = 0{,}4$	$\varepsilon = 0{,}5$
Пористая, насыщенная водой	v_0	2000	2200	2400	2600	2800	3000
	v_∞	2160	2340	2500	2660	2830	3000
Пористая, насыщенная нефтью	v_0	1570	1830	2050	2350	2870	2800
	v_∞	1880	2100	2300	2520	2720	2920

Данные табл. 6 достаточно полно показывают различие скоростей для одной и той же пористой среды при насыщении ее водой и нефтью, причем различным оказывается и диапазон (дисперсия) изменения скоростей. В пористой среде, насыщенной нефтью, в силу относительно высокого значения показателя адиабаты для нефти наблюдается более значительная дисперсия скорости. Увеличение степени цементации породы ε влечет за собой уменьшение дисперсии, однако для пористой среды, насыщенной нефтью, при $K\beta_1 = 0{,}5$ дисперсия скорости еще заметна.

Принятые здесь значения параметра $\varepsilon = K\beta$ согласуются с имеющимися экспериментальными данными для естественных пористых пластов. Поэтому можно сделать вывод: скорость распространения упругих волн в насыщенных нефтью пластах заметно уменьшается при переходе от высоких частот к низким, тогда как в водонасыщенных пластах это уменьшение почти незаметно. Отсюда при низких частотах коэффициент отражения от водо-нефтяного контакта должен быть значительно выше, чем при высоких.

Эффект термической дисперсии волн в насыщенных нефтью пластах отмечался в книге [152]. Однако предельные скорости оценивались там согласно модели М. А. Исаковича [93] и ее некоторым видоизменениям [158], т. е. не учитывались деформации скелета среды и различия инерционных свойств твердой и жидкой фаз.

Проанализируем особенности затухания волн низких (сейсмических) частот в указанных средах (см. [78, 83]). Для исследуемых сред выполняется условие $\alpha_2 \gg \alpha_1$ (коэффициент объемного расшире-

ния для частиц скелета $\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ 1/°C, тогда как для воды $\alpha_2 = 20 \cdot 10^{-5}$ 1/°C, а для нефти $\alpha_2 = 73 \cdot 10^{-5}$ 1/°C — см. табл. 5).

Если $\alpha_2 \gg \alpha_1$ и величина $\left(1 - \frac{1}{\gamma_1}\right) = \frac{\alpha_1^2 T_0}{\beta_1 c_1}$ близка к нулю (для частиц кварца последнее условие выполняется очень хорошо), то из общей системы уравнений (9.6)—(9.10) для продольных периодических волн можно получить следующее дисперсионное соотношение:

$$\xi^4 - \left\{ \frac{\rho_1 + \frac{n^2 \rho_2}{m(1-m)}}{\rho} + \frac{\rho_2}{m\rho} \frac{\beta}{B} [1 - M(h)] + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{\zeta} \left[(n+m)^2 + (1-m) \frac{\beta}{B} (1 - M(h)) \right] \right\} \xi^2 +$$

$$+ \left(\frac{\rho_\infty}{\rho} + \frac{i}{\zeta} \frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{\beta}{B} [1 - M(h)] = 0, \qquad (10.3)$$

где

$$M(h) = \frac{m\beta_2}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right) \frac{\left(h^2 + \frac{mc_2}{c}\right)}{1 + h^2} - i \frac{m\beta_2}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right) \frac{(1-m) c_1 h}{C(1+h^2)}.$$

Из уравнения (10.3) можно получить следующее выражение для коэффициента затухания первой продольной волны при низких частотах ($h \ll 1$, $\zeta \ll 1$):

$$\delta = \frac{\omega^2}{2v_0} \left\{ \left(\frac{L}{v_0^2 \rho_0 \beta \Omega} - \frac{\rho_\infty}{\rho_0 \beta} - \frac{1}{v_0^4 \rho \rho_0 B \beta \Omega} \right) \tau + \frac{H}{\Omega} \left(1 - \frac{1-m}{v_0^2 \rho_0 B}\right) \tau_T \right\},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{(n+m)^2 (1-m) \frac{\beta}{B} \Omega}{\rho_0 \beta \Omega}}, \quad \Omega = 1 - \frac{m^2 \beta_2 c_2}{\beta c} \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right), \qquad (10.4)$$

$$H = \frac{m(1-m)\beta_1 c_1}{\beta C} \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right), \quad L = \frac{\rho_2}{m\rho} \frac{\beta}{B} \Omega + \frac{n^2 \rho_2 + m(1-m)\rho_1}{m(1-m)\rho}.$$

Согласно формуле (10.4) коэффициент затухания состоит из двух частей: δ_1 и δ_2, причем $\delta_2 \approx (1 - \gamma_2^{-1})$. Для воды значение γ_2 близко к единице, а потому для пористой водонасыщенной среды $\delta_1 \gg \delta_2$, т. е. $\delta \approx \delta_1$ и вполне оправданным оказывается проведенный выше анализ (§ 7, 8), не учитывающий температурных эффектов. Однако для пористой среды, насыщенной нефтью ($\gamma_2 = 1{,}25$), величина δ_2 будет существенной.

Проведем оценки сначала для слабо сцементированной пористой среды. Для такой среды коэффициент δ можно вычислять по более простой формуле (9.16).

Из данных для *нефтенасыщенной* пористой среды согласно данным табл. 5 следует

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} \approx \frac{\rho_0}{\theta_0} \frac{(\theta_0 - \theta_\infty)}{(\rho_0 - \rho_\infty)} \frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 0{,}9 \frac{\tau_2}{\tau_1}. \qquad (10.5)$$

Если оценивать время инерционной релаксации согласно выражению $\tau_1 \approx d^2/\nu$ (где ν — кинематическая вязкость нефти), а тепловой — по формуле $\tau_T \approx d^2/a$, то $\tau_T \approx \tau\nu/a$. Для частиц твердой фазы $a_1 \approx 10^{-2}$ *см*^{2}/*сек*, а для нефти $a_2 \approx 10^{-3}$ *см*^{2}/*сек*.

Отсюда завышенное время выравнивания температуры между фазами будет определяться температуропроводностью нефти и $a \approx a_2$. Если для нефти $\nu \approx 3 \cdot 10^{-2}$ *см*^{2}/*сек*, то $\tau_T/\tau \approx 30$ и $\delta_2/\delta_1 \approx 27$. Если же брать явно заниженное значение для τ_T, оценивая a по данным для кварца, то и тогда $\delta_2/\delta_1 \approx 2{,}7$.

С увеличением степени цементации среды коэффициент затухания δ в целом уменьшается. Однако отношение δ_2/δ_1, как это следует из уравнений (10.4), в интервале $\varepsilon < 0{,}5$ меняется несильно.

Газонасыщенная пористая среда характеризуется условиями:

$$\alpha_2 \gg \alpha_1, \quad \rho_1 \gg \rho_2, \quad \beta_2 \gg \beta_1, \quad c_2 \gg c_1. \tag{10.6}$$

При этом дисперсионное соотношение (10.3) еще больше упрощается и принимает вид

$$\xi^4 - \left[1 + \frac{\rho_2\beta_2}{\rho_1 B} M(h)\left(1 + \frac{i}{\tau_1\omega}\right)\right]\xi^2 + \frac{\rho_2\beta_2}{\rho_1 B}\left(1 + \frac{i}{\tau_1\omega}\right) M(h) = 0, \tag{10.7}$$

$$\xi = \frac{\eta}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\rho_1 B}}, \quad \tau_1 = \frac{k_0}{m\nu},$$

$$M(h) = \frac{1 + \frac{h^2}{\gamma_2}}{1 + h^2} + i\left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{h}{1 + h^2}.$$

Для первой и второй продольной волны из (10.7) соответственно имеем

$$\xi_1^2 = \frac{\rho_2\beta_2}{\rho_1 B}\left(1 + \frac{i}{\tau_1\omega}\right)\left[\frac{1 + \frac{h^2}{\gamma_2}}{1 + h^2} + i\left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{h}{1 + h^2}\right], \quad \xi_2^2 = 1. \tag{10.8}$$

Таким образом, в насыщенной газом пористой среде вторая волна распространяется без затухания со скоростью, определяемой только упругими постоянными (коэффициентами Ламе) скелета и плотностью твердой фазы (см. § 8). Затухание этой волны будет определяться диссипативными процессами внутри твердой фазы (внутреннее трение и т. д.), которые здесь не рассматриваются. Сопоставление со случаем насыщения порового пространства капельной жидкостью показывает, что это волна второго рода — при росте сцементированности ее скорость приближается к скорости в сплошном материале твердой фазы. Первая (более медленная в сильно сцементированных средах) волна (ее иногда называют «воздушной» волной, волной «по газу») является по существу волной первого рода, а небольшая скорость ее распространения определяется большой сжимаемостью газа. Скелет среды при ее распространении практически неподвижен,

абсолютно жесткий и выражение (10.8) совпадает с аналогичным результатом, получаемым при деформируемом скелете.

Если при насыщении порового пространства капельной жидкостью изменение порового давления порождает в основном более быструю продольную волну (см. § 5), то в газонасыщенных сцементированных средах возникают главным образом более медленные волны (см. [78, 83]).

Перейдем к более подробному анализу *динамических процессов в пористых средах с абсолютно жестким скелетом.*

Распространение звуковых волн в недеформируемой газонасыщенной пористой среде восходит к Кирхгофу и Релею [189] и наиболее подробно было рассмотрено К. Цвиккером и К. Костеном [222], которые предположили, что среда состоит из системы капиллярных трубок поперечного сечения с абсолютно жесткими стенками. Это позволило им ограничиться исследованием задачи о волнах в газе, заполняющем единичную жесткую трубку. Если принять, что температура стенок трубки неизменна, то соответствующая задача имеет достаточно простое точное решение.

Ниже приводится анализ характерных особенностей звуковых волн в среде с абсолютно жестким скелетом на основе исходной системы акустических уравнений (5.1)—(5.VII), не связанной с тем или иным типом капиллярной модели среды. Последующее сопоставление (§ 11) с результатами Цвиккера и Костена [222] позволит оценить пределы применимости квазистационарного закона межфазового теплообмена (4.27), предложенного в работе [193].

Если считать, что скелет пористой среды абсолютно жесткий ($m = \text{const}$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$), то уравнения сохранения массы, импульса, уравнения состояния нужно формулировать [82] только для жидкой фазы, а уравнения баланса тепла — для обеих фаз:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_2^0 \operatorname{div} \vec{w} = 0,$$

$$\rho_2^0 \frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu m_0 (1-m_0)}{a} w_i, \tag{10.9}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_2^0} = \beta_2 p - \alpha_2 T_2,$$

$$(1-m)\, c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = (1-m) D_1 \nabla^2 T_1 + \varkappa (T_2 - T_1) + m\alpha_2 T_0 \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$mc_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = mD_2 \nabla^2 T_2 - \varkappa (T_2 - T_1).$$

Уравнения (10.9) сводятся к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t_2} - v_T^2 \nabla^2 p - \frac{\mu m (1-m)}{a\rho_2^0} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\mu m (1-m)}{a\rho_2^0} \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \tau_T \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} = a \nabla^2 T_2 + (a_1 - a_2) \tau_T \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 T_2) - a_1 a_2 \tau_T \nabla^2 \times$$

$$\times (\nabla^2 T_2) + \frac{m\alpha_2 T_0}{C} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha_2 T_0}{c_2} \tau_T \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_2 \frac{\alpha_2 T_0}{c_2} \tau_T \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 p), \tag{10.10}$$

здесь

$$a_1 = D_1/c_1, \quad a_2 = D_2/c_2, \quad a = \frac{mD_1 + (1-m)D_2}{C},$$

$$C = mc_2 + (1-m)c_1, \quad \tau_T = \frac{m(1-m)c_1c_2}{\varkappa C},$$

$v_T = (\rho_2^0\beta_2)^{-1/2}$ — изотермическая скорость звука в свободной жидкости.

Приведем систему (10.10) к безразмерному виду, вводя безразмерные переменные $\xi = wx/v_T$, $t' = \omega t$, $P = p/p_0$, $\theta = T_2/T_0$, (где ω — циклическая частота волны):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial P}{\partial t'} - \frac{\alpha_2 T_0}{\beta_2 p_0}\frac{\partial^2 \theta}{\partial t'^2} - \frac{\alpha_2 T_0}{\beta_2 p_0}\frac{1}{h_1}\frac{\partial \theta}{\partial t'} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t'} + \eta_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t'^2} = \zeta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{a_1 + a_2}{a}\zeta h_2 \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}\right) - \frac{a_1 a_2}{a}\zeta^2 h_2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial \xi^4} +$$

$$+ \frac{m\alpha_2 p_0}{C}\frac{\partial P}{\partial t'} + \frac{\alpha_2 p_0}{c_2} h_2 \frac{\partial^2 P}{\partial t'^2} - \frac{a_1}{a}\zeta \frac{\alpha_2 p_0}{c_2} h_2 \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}\right), \quad (10.11)$$

$$h_1 = \frac{\rho_2^0 \omega a}{\mu m (1-m)}, \quad h_2 = \tau_T \omega, \quad \zeta = \frac{a\omega}{v_T^2}.$$

Уравнения (10.11) можно существенно упростить [82]. В самом деле, рассматривать пористую среду как сплошную однородную заведомо недопустимо, если характерный размер зерен d сопоставим с длиной звуковой волны, т. е. уравнения (10.11) пригодны при $d \ll v_s(\omega)$, где $v_s = \sqrt{\gamma_2} v_T$ — адиабатическая скорость звука в свободной жидкости. Последнее соотношение эквивалентно условию $\omega \ll \omega_0$ (где $\omega_0 \approx \frac{v_s}{d}$).

Для газа величина $v_s \approx 3 \cdot 10^4$ *см/сек*, а для жидкостей $v_s \approx$ $\approx 1{,}5 \cdot 10^5$ *см/сек*. Если размер зерен (мелкозернистые среды) d порядка 10^{-5} *см*, то $\omega_0 \approx 10^7 - 10^8$ *1/сек*. Так как $a \approx 10^{-1}$ *см²/сек* и менее, то $\zeta \ll \zeta_0$, $\zeta_0 = a\omega_0/v_T^2 \approx 10^{-2} - 10^{-3}$. Более крупным зернам соответствует меньшее значение параметра ζ_0. Поэтому во втором уравнении (10.11) можно пренебречь членами с ζ (коэффициент при первом члене имеет порядок единицы), если скорость второй звуковой волны имеет порядок скорости звука в свободной жидкости, а коэффициенты при остальных членах (в том числе h_2) имеют порядок больший, нежели ζ_0. Другими словами, в случае акустических волн частоты ω такой, что $h_2 = \tau_2\omega \gg \zeta$, $1 \gg \zeta = (a_0\omega)/v_T^2 \gg 10^{-2} \div 10^{-3}$ можно пренебречь температуропроводностью (положить $a_1 = a_2 = a = 0$) в каждой фазе по сравнению с межфазовым теплообменом. Тогда второе уравнение (10.11) запишется в размерных переменных в виде

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \tau_T \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} = \frac{m\alpha_2 T_0}{C}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha_2 T_0}{c_2}\tau_T \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (10.12)$$

Условие $h_2 \to \infty$ соответствует «замороженному» состоянию среды, а $h_2 \to 0$ — «равновесному» с точки зрения тепловых процессов. Аналогично изменения параметра h_1 означают переход от «замороженного» состояния, при котором жидкость двигается как в свободном состоянии, к «равновесному» — жидкость неподвижна (его скорость равна нулевой скорости смещения скелета среды).

Найдем теперь закон распространения монохроматических волн: $p = A \exp(i\eta x - i\omega t)$, $T_2 = B \exp(i\eta x - i\omega t)$.

Уравнения (10.11) при этом сводятся к следующему дисперсионному уравнению:

$$\frac{v_T^2\eta^2}{\omega^2} = \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\left[\frac{h_2^2 + \frac{mc_2}{C}}{1+h_2^2} + \frac{h_2}{h_1}\frac{(1-m)c_1}{C(1+h_2^2)}\right]\right\} + \\ + i\left\{\frac{1}{h_1}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{h_2^2 + \frac{mc_2}{C}}{1+h_2^2}\right] + h_2\frac{(1-m)c_1\left(1-\frac{1}{\gamma_2}\right)}{C(1+h_2^2)}\right\}, \quad (10.13)$$

где γ_2 — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Рассмотрим подробнее волны в пористой среде, насыщенной газом. Для нее $mc_2 \ll C$ и $C \approx (1-m)c_1$ и уравнение (10.13) можно упростить

$$\frac{v_T^2\eta^2}{\omega^2} = \left[\frac{1 + h_2^2/\gamma_2}{1+h_2^2} - \frac{h_2}{h_1}\frac{\left(1-\frac{1}{\gamma_2}\right)}{1+h_2^2}\right] + i\left[\frac{1}{h_1}\frac{\left(1+\frac{h_2^2}{\gamma_2}\right)}{1+h_2^2} + h_2\frac{1-\frac{1}{\gamma_2}}{1+h_2^2}\right]. \quad (10.14)$$

Пренебрежение величиной mc_2/C эквивалентно предположению о том, что теплоемкость единицы объема скелета бесконечно велика (температура скелета постоянна и равна начальной). Действительно, уравнения распространения звуковых волн в среде с недеформируемым скелетом постоянной температуры записываются в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - v_T^2\nabla^2 p - \frac{\mu m(1-m)}{a\rho_2^0}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\frac{\mu m(1-m)}{a\rho_2^0}\frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (10.15)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\alpha_2 T_0}{c_2}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\tau_T}T_2, \quad \tau_T = mc_2/\varkappa$$

и именно этим уравнениям соответствует соотношение (10.14).

Из дисперсионного соотношения (10.14) для скорости распространения v и коэффициента затухания δ звуковой волны получаем

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_T\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left(\frac{1+\frac{h_2^2}{\gamma_2}}{1+h_2^2} - \frac{h_2}{h_1}\frac{1-\frac{1}{\gamma_2}}{1+h_2^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_1}\frac{1+\frac{h_2^2}{\gamma_2}}{1+h_2^2} + h_2\frac{1-\frac{1}{\gamma_2}}{1+h_2^2}\right)^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1+\frac{h_2^2}{\gamma_2}}{1+h_2^2} - \frac{h_2}{h_1}\frac{1-\frac{1}{\gamma_2}}{1+h_2^2}\right)\right\}^{1/2}, \quad (10.16)$$

$$\delta=\frac{\omega}{v_T\sqrt{2}}\left\{\sqrt{\left(\frac{1+\frac{h_2^2}{\gamma_2}}{1+h_2^2}-\frac{h_2}{h_1}\,\frac{1-\frac{1}{\gamma_2}}{1+h_2^2}\right)^2+\left(\frac{1}{h_1}\,\frac{1+\frac{h_2^2}{\gamma_2}}{1+h_2^2}+h_2\,\frac{1-\frac{1}{\gamma_2}}{1+h_2^2}\right)}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1+\frac{h_2^2}{\gamma_2}}{1+h_2^2}-\frac{h_2}{h_1}\,\frac{1-\frac{1}{\gamma_2}}{1+h_2^2}\right)\right\}^{1/2}. \qquad (10.17)$$

При малых частотах ($h_1 \ll 1$, $h_2 \ll 1$) имеем

$$\delta\approx\frac{1}{v_T}\sqrt{\frac{\mu m\,(1-m)\,\omega}{2a\rho_2^0}}=\frac{1}{v_T}\sqrt{\frac{\omega}{2\tau_1}},\quad v\to 0. \qquad (10.18)$$

Отсюда видно, что при самых малых частотах проведенная выше оценка роли теплопроводности фаз перестает быть справедливой — в расчет необходимо вводить также температуропроводность.

В другом предельном случае весьма больших частот ($h_1 \gg 1$, $h_2 \gg 1$) оказываются справедливыми формулы

$$\delta\approx\frac{1}{2\tau_1 v_s}+\frac{\gamma_2-1}{2\tau_T v_s},\quad v\approx v_s. \qquad (10.19)$$

В отсутствие вязкого трения

$$\frac{v}{v_s}=\sqrt{\frac{1+h_2^2}{\gamma+h_2^2}},\quad v_s\tau_T\delta=\frac{(\gamma_2-1)\,h^2}{2\sqrt{(\gamma_2+h_2^2)\,(1+h_2^2)}}, \qquad (10.20)$$

причем при $h_2 \ll 1$

$$v\approx v_T,\quad \delta\approx\frac{\left(1-\frac{1}{\gamma_2}\right)\tau_T}{2v_T}\,\omega^2, \qquad (10.21)$$

а при $h_2 \gg 1$

$$v\approx v_s,\quad \delta\approx\frac{\gamma_2-1}{2v_s\tau_T}. \qquad (10.22)$$

Для интенсивности затухания в газонасыщенных пористых средах весьма существен отмеченный выше факт, что здесь при распространении «воздушных» волн скелет среды практически неподвижен.

Коэффициент затухания звука в поровых каналах бесконечно большой частоты (т. е. слабого разрыва порового давления, см. § 13) согласно формуле (10.19) выражается следующим образом ($\nu_2 \approx a_2$, $\tau \approx \tau_T$):

$$\delta=\frac{1}{2v_s}\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{\gamma_2-1}{\tau_T}\right)\approx\frac{\gamma_2}{2v_s\tau_1}=\frac{\gamma_2 m\mu\,(1-m_0)}{2a_0 v_s\rho_2^0}.$$

В то же время в насыщенной капельной жидкостью слабо сцементированной пористой среде (твердые частицы также смещаются) аналогичный коэффициент для первой волны (см. § 8) равен

$$\delta_a^0=\frac{1}{2v_\infty}\,\frac{m\mu_ж}{\rho a_0}\,\frac{\rho_1}{\rho_ж}\left(1-\frac{\rho_ж}{\rho_1}\right)^2(1-m),$$

причем с увеличением (в пределах, имеющих практический смысл) степени сцементированности коэффициент δ_a несколько уменьшается

($\delta_a \leqslant \delta_a^0$), а δ не изменяется. Поэтому сопоставление δ и δ_a^0 достаточно для оценки затухания при всех степенях сцементированности.

Пусть $\rho_1 = 2{,}65$ *г/см*^{3}, $\rho_ж = 1$ *г/см*^{3}, $v_\infty = 2160$ *м/сек*, $v_s = 350$ *м/сек*, $\rho_2^0 = 10^{-2}$ *г/см*^{3}, $\mu_ж = 1$ *спз*, $\mu = 10^{-2}$ *спз*. Тогда, несмотря на то что вязкость газа в 100 раз меньше вязкости жидкости,

$$\frac{\delta_a}{\delta} \leqslant \frac{\delta_a^0}{\delta} = \frac{v_s}{v_\infty}\frac{\rho_2^0}{\rho}\frac{\mu_ж}{\mu}\frac{\rho_1}{\rho_ж}\left(1-\frac{\rho_ж}{\rho_1}\right)^2\frac{1}{\gamma_2} = 0{,}06. \qquad (10.23)$$

Поэтому газонасыщенные пористые материалы проявляют исключительно высокие поглощающие свойства, если при падении на них звуковой волны в материале возникают в основном волны «по газу». Возбуждение волн того или иного типа зависит от способа передачи импульса.

§ 11. ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ РАССМАТРИВАЕМОЙ ТЕОРИИ

Для определения границ области допустимых вариаций параметров процесса, при которых сохраняются справедливыми предпосылки излагаемой здесь теории, необходимо рассмотреть динамические процессы в пористой среде с настолько простой внутренней структурой, которая позволила бы провести строгий теоретический анализ.

Примерами таких модельных пористых сред служат система тонких цилиндрических трубок постоянного диаметра и система щелей постоянного поперечного сечения (что соответствует поре с поперечным сечением в виде очень вытянутого эллипса).

Цвиккер и Костен [222] рассматривали закономерности распространения звука в вязком теплопроводном газе в цилиндрических трубках, Био [258] — в вязкой жидкости, заполняющей такую среду, П. П. Золотарев — в теплопроводящей жидкости в щелевых каналах [82].

Определим сначала эффективное выражение для межфазного теплообмена. При этом будем предполагать, что стенки каналов имеют постоянную температуру T_0 (что оправдано для пористой газонасыщенной среды).

Задача о распространении звука в канале кругового сечения рассматривалась в книге [222]. Здесь приведем решение задачи о распространении звука в щели [82].

Пусть щель имеет ширину $2l_1$ и координата x направлена вдоль щели, а координата y — поперек нее. Примем обычное предположение, что ширина щели много меньше длины звуковой волны. В пренебрежении тепловым потоком вдоль волны по сравнению с тепловым потоком к стенкам щели уравнение энергии для газа можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a_2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{T_0\alpha_2}{c_2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \qquad (11.1)$$

где $T(y, t)$ — отклонение температуры газа от равновесной T_0.

При $T = T'(y) \exp i\omega t$, $p = p_0 \exp i\omega t$ получим уравнение для амплитуды колебаний

$$-i\frac{\omega}{a_2}T' + i\frac{\omega T_0 \alpha_2}{a_2 c_2}p_0 = 0. \tag{11.2}$$

Решение уравнения (11.2), соответствующее граничным условиям

$$T' = 0, \quad y = \pm l_1, \tag{11.3}$$

будет выражено через гиперболический косинус:

$$T'(y) = \frac{\alpha_2 T_0 p_0}{c_2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}\,y}{\operatorname{ch}\sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}\,l_1}\right). \tag{11.4}$$

Поток тепла q из единицы объема газа в единицу времени (через поверхность стенок) равен

$$q = -\frac{D_2(\partial T/\partial y)_{y=l_1}}{l_1} = \frac{D_2}{l_1}\frac{\alpha_2 T_0 p_0}{c_2}\sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}\left(\operatorname{th}\sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}\,l_1\right)e^{i\omega t}, \tag{11.5}$$

а среднее по ширине щели изменение температуры

$$T_2 = \frac{1}{2l_1}\int_{-l_1}^{l_1} T\,dy = \frac{\alpha_2 T_0 p_0}{c_2}\left(1 - \frac{\operatorname{th}\sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}\,l_1}{\sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}\,l_1}\right)e^{i\omega t}. \tag{11.6}$$

Если указанный поток представить в виде $q = \bar{\varkappa}_1 T_2$, то $\bar{\varkappa}_1$ окажется комплексной функцией частоты

$$\bar{\varkappa}_1 = \frac{3D_2}{l_1^2}F_1(n_1), \quad F_1(n_1) = \frac{\sqrt{i}\,n_1 \operatorname{th}(n_1\sqrt{i})}{3\left(1 - \frac{\operatorname{th}(n_1\sqrt{i})}{n_1\sqrt{i}}\right)}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{\omega}{a_2}}\,l_1, \tag{11.7}$$

что соответствует запаздыванию по фазе потока q от изменений поля температур.

Используя результаты [258], получим для канала кругового сечения следующий коэффициент теплообмена $\bar{\varkappa}_2$:

$$\bar{\varkappa}_2 = \frac{8D_2}{l_2^2}F_2(n_2), \quad F_2(n_2) = \frac{1}{4}\frac{n_2\Phi(n_2)}{1 - \frac{2}{in_2}\Phi(n_2)}, \tag{11.8}$$

$$\Phi(n_2) = \frac{\operatorname{ber}' n_2 + i\operatorname{bei}' n_2}{\operatorname{ber} n_2 + i\operatorname{bei} n_2}, \quad n_2 = l_2\sqrt{\frac{\omega}{a_2}},$$

где l_2 — радиус канала.

При малых частотах ($n_1 \ll 1$, $n_2 \ll 1$)

$$F_1(n_1) \approx F_2(n_2) \approx 1, \quad \bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1 = \frac{3D_2}{l_1^2}, \quad \bar{\varkappa}_2 = \varkappa_2 = \frac{8D_2}{l_2^2}. \tag{11.9}$$

В работе Био [258] выписывались периодические решения уравнения движения вязкой жидкости

$$\rho_2 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} \tag{11.10}$$

в щели со стенками, параллельными оси x и отстоящими от нее на расстоянии $y = \pm l$ (на стенках задавались условия прилипания жидкости), и в цилиндрической трубке постоянного радиуса. Им было найдено, что для больших частот $R_l = \bar{b} w_i$, причем для пор в виде щелей и пор в виде трубки кругового радиуса было получено соответственно

$$\bar{b} = \bar{b}_1 = \frac{3\mu}{l_1^2} F_1(z_1), \quad \bar{b} = \bar{b}_2 = \frac{8\mu}{l_2^2} F_2(z_2),$$
$$z_1 = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2} l_1^2, \quad z_2 = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2} l_2^2, \tag{11.11}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости (газа).

Из сопоставления выражений (11.7), (11.8) и (11.11) следует их полная аналогия, причем роль коэффициентов теплопроводности D_2 и температуропроводности a_2 газа в формулах (11.11) выполняют соответственно параметры μ и ν.

Поскольку форма поперечного сечения пор сказывается лишь на небольшом изменении масштаба длины, для представления зависимости $\bar{\varkappa}$ от частоты для системы параллельно расположенных одинаковых пор-каналов можно ввести [258] универсальную комплексную функцию $F(n)$, определяемую выражением (11.8), где $n = l\sqrt{\omega/a^2}$. Параметр размерности длины l является характеристикой размера пор и формы их поперечного сечения. Для пор кругового сечения l равен радиусу поры, для пор щелевидной формы ширины $2l_1$ имеем $l = {}^4/_3 l_1$.

Из формул (11.9) соответственные выражения для $\tau_T = mc_2/\varkappa$ имеют вид

$$\tau'_T = \frac{1}{3}\frac{l_1^2}{a_2}, \qquad \tau''_T = \frac{1}{8}\frac{l_2^2}{a_2}. \tag{11.12}$$

Для системы параллельных пор выражение для $\bar{b}$ таково [258]:

$$\bar{b} = \frac{\delta_*^2 m\mu}{l^2} F\left[\delta_* (h_1)^{1/2}\right], \tag{11.13}$$

где δ_* — так называемый структурный множитель, причем $(16/3)^{1/2} \leqslant \delta_* \leqslant (8)^{1/2}$.

Согласно расчетам [82] для $\bar{\varkappa}$ в этом случае имеем

$$\bar{\varkappa} = \frac{\delta_*^2 m D_2}{l^2} F\left(\delta_* \sqrt{h_2}\right). \tag{11.14}$$

Упомянем в связи с приведенными здесь результатами работу Морзе [310], в которой рассматривалось затухание звука в насыщенной газом пористой несжимаемой среде. В отличие от Цвиккера и Костена там принималась произвольная ориентация поровых каналов, причем при больших радиусах каналов учитывалась зависимость проницаемости от частоты. Такое уточнение можно провести и для системы (5.I) — (5.VII), если подставить выражения для коэффициента проницаемости (11.11) в уравнения движения и полностью рассчитать характеристики распространения монохроматического звука. Воспользовавшись подобным соображением, Био [258] получает для насыщения среды капельной жидкостью те же результаты, что и раньше для волн малых частот ($F(z) \to 1$ при $z \to 0$), и, кроме того, изучает большие частоты. Он получил асимптотическое выражение для скорости

$$v_s \to \left[\frac{(1-m)\lambda_2}{\rho_{11}(1-\rho_{12}^2/\rho_{11}\rho_{22})}\right]^{1/2}, \quad \zeta_1 = \omega\tau_1 \to \infty \tag{11.15}$$

и коэффициента затухания поперечных волн

$$\delta_s \to \frac{\sqrt{\zeta_1}}{4}\left(\frac{\rho_{12}+\rho_{22}}{\rho_{22}^2}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{22}^2}}, \quad \zeta_1 = \omega\tau_1 \to \infty. \tag{11.16}$$

Здесь $\tau_1 = (\rho_0\tau)(1-m_0)^{-1}\rho^{-1} \approx \tau$.

Эти формулы при $\rho_{12} = 0$ переходят в следующие выражения:

$$v_{s\infty} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\rho_1}}, \qquad \delta_s = \frac{\sqrt{\zeta_1}}{4}\frac{1}{\sqrt{(1-m)\rho_1}} = \sqrt{\frac{\omega a_0}{\mu m(1-m)^2}\frac{\rho_2}{\rho_1}}. \tag{11.17}$$

Другими словами, микронестационарность — нарушение закона Дарси (пуазейлевского движения в порах) — не ведет к изменению асимптотического значения скорости $v_{s\infty}$, справедливой в рамках механики сплошной среды. Этот вывод для поперечных волн был получен (при $\rho_{12} = 0$) также Брутсаертом [265]. В то же время существенно изменяется при $\omega \to \infty$ асимптотическое поведение коэффициента затухания: выполнение закона Дарси для всех частот приводит к постоянному асимптотическому значению (7.23), тогда как учет нарушения пуазейлевского течения при больших частотах приводит к возрастанию коэффициента затухания пропорционально $\sqrt{\omega}$. Для продольных волн Био выписывает в общем виде дисперсионное уравнение и на основе численного расчета отмечает, что в области больших частот скорости распространения волн будут такие же, как при насыщении среды невязкой жидкостью; в явном виде соответствующие выражения он не приводит. Био выписывает асимптотические выражения ($\omega \to \infty$) для коэффициентов затухания волн первого и второго рода, оба они оказываются пропорциональными $\sqrt{\omega}$. Кроме того, Био выписывает выражения и приводит графики для величин коэффициентов затухания за цикл колебания, а затем для групповой скорости распространения волн.

Брутсаерт [265] провел аналогичные вычисления для трехфазной среды, причем оценил пригодность указанных асимптотических формул для скорости и затухания поперечных волн (11.15) — (11.16) следующим критерием:

$$\omega\tau_1 \gg 10 \div 100, \quad \omega \gg (10 \div 100)\,\tau_1^{-1} \approx (10 \div 100)\,\tau^{-1}. \qquad (11.18)$$

Для рассматриваемого здесь примера водонасыщенного кварцевого песка имеем

$$\omega \gg (10 \div 100)\,(10^3 \div 10^5)\ сек^{-1} \approx (10^4 \div 10^7)\ сек^{-1}.$$

Брутсаерт получает три типа продольных волн (из-за различного давления в газе и жидкости), выписывает выражение для равновесной скорости (при малых частотах) волны первого рода и отмечает, что для больших частот — оценка (11.18) — скорости волн совпадают со скоростями волн в отсутствие сил объемного вязкостного взаимодействия.

Био оценивает область применимости закона Дарси в первой части своей работы условием (нарушения пуазейлевского течения в порах):

$$\omega \leqslant \frac{\pi^2 \nu}{2d^2} = \omega_t, \qquad (11.19)$$

где d — эффективный диаметр поры.

Био получает, что для водонасыщенных пористых сред условию $d = 10^{-2}\ см$ соответствует $\omega_t = 600\ сек^{-1}$; $d = 10^{-3}\ см$ $\omega_t = 6000\ сек^{-1}$, но при $d = 0{,}1\ см$ $\omega_t = 60\ сек^{-1}$. Если же здесь брать в качестве диаметра поры (как и обычно при оценке чисел Рейнольдса) величину $\sqrt{k/m_0} = \sqrt{a_0/(1-m_0)\,m_0}$, то эта оценка принимает вид

$$\omega_t = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{\mu m_0 (1-m_0)}{a_0 \rho_2} = \frac{\pi^2}{2}\,\tau_1^{-1} \sim 5\tau_1^{-1} \qquad (11.20)$$

и дает для $\tau_1 \approx \tau = 10^{-3}$—$10^{-5}\ сек$ значения $\omega_t = 5\,(10^3$—$10^5)\ сек^{-1}$ — в 2 раза меньше, чем критерии (11.18) применимости асимптотических формул, отмеченных Брутсаертом. Таким образом, Био оценивает границы применимости закона объемного трения Дарси отклонениями от линейной формулы.

Однако при рассмотрении звуковых колебаний важно влияние этих отклонений на эффективные значения коэффициента затухания и скорости. Из анализа Био и Брутсаерта следует, что асимптотические значения поперечных скоростей не изменяются, но вопрос об отклонениях коэффициента затухания и промежуточных скоростей остается открытым.

Рассмотрим теперь исследование влияния микронестационарности нарушений закона $q = \varkappa\,(T_2 - T_1)$ на эффективные параметры звуковых волн [82]. Для этого найдем кривые затухания и дисперсии для распространения звука в канале щелевидной формы, рассмотренном ранее, и сравним эти кривые с аналогичными кривыми, полученными для этого случая в предположении, что $q = \varkappa\,(T_2 - T_1)$. Последние кривые определяются, очевидно, выражениями (10.20), если в них под τ_2 подразумевать величину $l_1^2/3a_2$.

Для нахождения точных формул воспользуемся известным соотношением

$$h - i\delta = \sqrt{\frac{\rho_2}{p}}\,. \tag{11.21}$$

Подставляя уравнение (11.21) в выражение для ρ_2 из (10.9) и для T_0 согласно формуле (11.6) при $p = p_0 e^{i\omega t}$, получим

$$h - i\delta = \omega \sqrt{\rho_2^0 \beta_2 \left\{1 - \frac{\alpha_2^2 T_0}{c_2 \beta_2}\left(1 - \frac{\operatorname{th} l_1 \sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}}{l_1 \sqrt{i\frac{\omega}{a_2}}}\right)\right\}}. \tag{11.22}$$

Из выражения (11.22) следует

$$\frac{v}{v_s} = \frac{1}{\sqrt{1 + H_1 \left(\frac{3}{2} h_2\right)^{1/2}}},$$

$$v_s \tau_T \delta = \frac{h_2}{2} H_2 \sqrt{\frac{3}{2} h_2}\, \sqrt{1 + H_1 \sqrt{\frac{3}{2} h_2}}\,,$$

$$H_1(\psi) = \frac{(\gamma_2 - 1)(\operatorname{sh} 2\psi + \sin 2\psi)}{4\psi(\cos^2\psi \operatorname{ch}^2\psi + \sin^2\psi \operatorname{sh}^2\psi)}, \qquad \psi = \sqrt{\frac{\omega}{2a_2}}\, l_1, \tag{11.23}$$

$$H_2(\psi) = \frac{(\gamma_2 - 1)(\operatorname{sh} 2\psi - \sin 2\psi)}{4\psi(\cos^2\psi \operatorname{ch}^2\psi + \sin^2\psi \operatorname{sh}^2\psi) + (\gamma_2 - 1)(\operatorname{sh} 2\psi + \sin 2\psi)}.$$

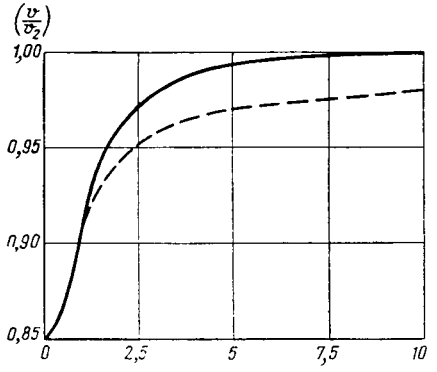


Рис. 10. Дисперсия звуковых монохроматических волн в щелевидном канале [70], $v = v_2 f(h_2)$.

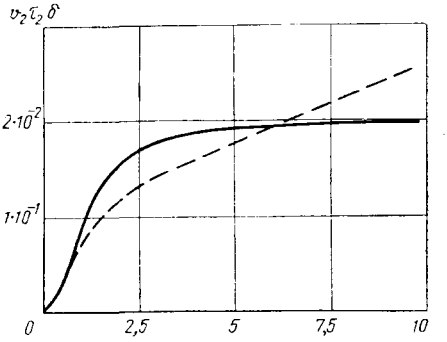


Рис. 11. Зависимость коэффициента затухания от частоты монохроматической звуковой волны в щелевидном канале, $v_2\tau_2\delta = f(h_2)$.

На рис. 10 и 11 представлены результаты расчетов по формулам (10.20) (сплошной линией) и (11.23) (пунктиром) для $\gamma_2 = 1{,}4$, из которых видно, что значения v и δ для сопоставляемых случаев

совпадают асимптотически при $h_2 \to 0$. Однако согласно рис. 10 разница в скоростях для всех h_2 несущественна и не превышает 3%.

При $h_2 \leqslant 1$ разница между значениями коэффициентов затухания для сравниваемых случаев не превышает 10% (см. рис. 11). С ростом величины h_2 расхождение рассматриваемых кривых более существенно, но для $h_2 \leqslant 10$ не превышает 25%. Отсюда формула (10.20) вполне справедлива вплоть до $h_2 = 1$, что совпадает с оценкой Био для ω_t. Для более грубых расчетов ее можно применять вплоть до $h_2 = 10$, чему соответствует частота ω_t'.

Как уже отмечалось, для газа $a \approx \nu$, поэтому критические частоты ω_t и ω_t' можно оценивать, например, по τ_T. Если $\tau_T = \frac{1}{3}(l^2/a)$, то $\omega_t = 3a/l^2$. Пусть $a = 10^{-1}$ *см*^{2}/*сек*, $l = 10^{-2}$ *см*, тогда $\omega_t \approx 3 \cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$. Для мелкозернистых пористых сред $l \approx 10^{-3}$ *см*, поэтому ω_t еще больше. Напомним, что верхняя граница практического использования закона Дарси $\omega_t' = 10\omega_t$.

Для пористой среды, насыщенной водой, температурные эффекты несущественны, поэтому оценивать нужно по τ. Если $\tau = \frac{1}{3} l^3/\nu$ (где ν — кинематическая вязкость), то $\omega_t = 3\nu/l^2$, для $\tau = \frac{1}{8} l^2/\nu$ (трубчатые поры) $\omega_t = 8\nu/l^2$. Пусть $\nu = 10^{-2}$ *см*^{2}/*сек*, $l = 10^{-2}$ *см*, тогда для щелевидных пор $\omega_t = 300$ *сек*$^{-1}$, а для трубчатых пор $\omega \approx 800$ *сек*$^{-1}$.

Если $l = 10^{-3}$ *см*, то $\omega_t = (3—8)\,10^4$ *сек*$^{-1}$. Аналогичные оценки получены для этих условий в работе Био [258].

Приведенные оценки показывают, что рассмотренные ранее уравнения заведомо справедливы для волн сейсмического диапазона вплоть до высокочастотных сейсмических волн ($\sim$500 *сек*$^{-1}$).

Судя по оценкам § 8, асимптотическое значение для v_∞ справедливо, если $\zeta = \omega\tau_1\rho_0/\rho_\infty \gg 1$, что сводится при $\rho_0 \approx \rho_\infty$ к условию $\omega\tau_1 \gg 1$. По численным подсчетам [1] Геертсмы [294] значения скорости $v \approx v_\infty$ при $\omega\tau_1 > 5$. Отсюда для водонасыщенных песков, параметры которых приведены в табл. 4, имеем следующие оценки частоты: $\omega_\infty = 5\tau_1^{-1} = 10^3—10^5$ *сек*$^{-1}$, начиная с которой практически $v_\infty = v$. Этим значениям частот соответствует длина волн $\Lambda_\infty \approx 2 - 0{,}02$ *м* $\gg d$. Таким образом, скорость v_∞ соответствует продольным волнам гораздо большей длины, нежели размер частиц [2].

В то же время длина, например, поперечных волн, распространяющихся со скоростью $v_{s\infty}$, может оказаться сопоставимой с диаметром элементарных частиц среды, так как $v_{s\infty} \approx 100$ *м/сек*, $\Lambda_\infty = 2\pi v_{s\infty}/\omega_\infty \approx 0{,}2—0{,}002$ *м*.

При этом рассматриваемая здесь теория, основанная на представлениях механики сплошных сред, непригодна. Первый шаг в ее расширении состоит

---

[1] По данным этой работы [294] скорость $v \approx v_0$ при $\omega\tau_1 < 0{,}1$, что дает оценку $\omega_0 = 0{,}1\tau_1^{-1}$ для тех же чистых песков: $\omega_0 \approx 10^2—10^4$ *сек*$^{-1}$. Таким образом, диапазон дисперсии скоростей заключается между ω_∞ и ω_0, что соответствует от 100 до 1000 *гц* для песков большей проницаемости и от 10^4 до 10^5 *гц* для песков худшей проницаемости ($\tau_1 \approx 10^{-3}$ *сек* и $\tau_1 \approx 10^{-5}$ *сек* соответственно).

[2] Снижению проницаемости (переход от песков к глинам) соответствует уменьшение эффективного диаметра частиц среды.

в учете дополнительного механизма поглощения (перехода механической энергии в тепло), а поэтому и дисперсии скоростей сначала из-за рассеивания на случайных неоднородностях упаковки среды (масштаб на порядок больше, чем диаметр частиц d), а затем с переходом к ультразвуку — из-за рассеивания при отражениях волн от границ раздела фаз (границ отдельных зерен).

Согласно Ю. В. Ризниченко [190] и М. А. Исаковичу [93] среда представляется в виде последовательно чередующихся параллельных слоев двух различных материалов.

В работе [190] рассматриваются различия материалов по плотности и сжимаемости и выписываются формулы для определения скорости V_∞ высокочастотных ($\omega \to \infty$) и v_0 низкочастотных ($\omega \to 0$) волн. Высокочастотными называют такие волны, длина которых Λ гораздо меньше мощностей слоев модели, а скорость V_∞ определяется как средняя скорость прохождения таких волн через пачку слоев

$$V_\infty = \frac{l_1+l_2}{\frac{l_1}{V_1}+\frac{l_2}{V_2}} = \frac{1}{\frac{l_1}{l_1+l_2}\frac{1}{V_1}+\frac{l_2}{l_1+l_2}\frac{1}{V_2}}, \qquad (11.24)$$

где l_1, l_2 — мощности слоев первого и второго материалов, характеризуемых скоростями распространения волн соответственно

$$V_1 = 1/\sqrt{\beta_1\rho_1}, \quad V_2 = 1/\sqrt{\beta_2\rho_2}.$$

При анализе низкочастотных колебаний Ю. В. Ризниченко сначала показывает, что скорость распространения низкочастотных колебаний в дискретной среде равна скорости звука всех частот в такой непрерывной среде, масса и упругость которой равны средней массе и упругости любого целого числа звеньев дискретной среды (см. также работу С. А. Кац. Труды МНИ, вып. 25, М., Гостоптехиздат, 1959). Далее в работе [190] рассматриваемая слоистая модель гетерогенной среды заменяется на дискретную с чередующимися звеньями двух типов — сосредоточенной массы $\rho_\nu l_\nu$ и упругими связями $1/(\beta_\nu l_\nu)$, $\nu = 1, 2$, а затем на дискретную среду с одинаковыми звеньями: $\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2$, $1/(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2)$, соответствующими сумме двух различных начальных звеньев. Это позволяет выписать выражение для скорости v_0 в такой среде

$$v_0 = \frac{l_1+l_2}{\sqrt{(\rho_1 l_1+\rho_2 l_2)(\beta_1 l_1+\beta_2 l_2)}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\beta}}, \qquad (11.25)$$

где ρ_0 — средняя плотность среды; β — средняя сжимаемость среды:

$$\rho_0 = \frac{l_1\rho_1+l_2\rho_2}{l_1+l_2}, \quad \beta = \frac{l_1\beta_1+l_2\beta_2}{l_1+l_2}. \qquad (11.26)$$

Условие равенства $v_0 = V_\infty$ сводится к равенству волновых сопротивлений (акустических жесткостей) компонент: $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$. При $v_0 \neq V_\infty$ дисперсия скоростей физически объясняется многократными отражениями волн от границ раздела элементов гетерогенной среды [190].

При переходе к реальным средам Ю. В. Ризниченко трактует величину l_1/l_2 как соотношение объемов компонент. Поэтому формулу (11.24) можно представить в виде

$$V_\infty = \frac{1}{\frac{1-m_0}{V_1} + \frac{m_0}{V_2}}, \qquad (11.27)$$

а в формуле (11.25) для v_0 интерпретировать величины ρ_0, β так же, как и в предыдущем разделе.

Сопоставление с полученными выше результатами анализа дисперсионного уравнения (8.1) для продольных волн позволяет сделать вывод, что величина v_0, определенная Ю. В. Ризниченко, совпадает со скоростью v_0 низкочастотных наблюдаемых волн (т. е. волн давления) в мягких средах (в сцементированных средах анализ работы [190] неприменим — там справедлива формула Я. И. Френкеля (7.10), учитывающая изменения эффективных сжимаемостей компонент из-за возросшей жесткости межзерновых связей). Кроме того, надо заметить, что формулу для v_0 Ю. В. Ризниченко использует для объяснения малых скоростей звука в сухих пористых средах. Так, для сухого кварцевого песка (см. данные на стр. 74) в работе [190] получено значение $v_0 = 16$ *м/сек*, тогда как по данным той же работы [190] величины, измеренные Е. В. Карусом, имели порядок 60 *м/сек* (при длине волны 0,5 *м*).

Это расхождение нетрудно объяснить в рамках излагаемой здесь теории. В самом деле, согласно § 8, наблюдаемые волны в сухих грунтах соответствуют волне второго рода, в них происходит упругая переупаковка твердых частиц, скорость звука определяется не сжимаемостью материала твердых частиц, а параметром $B = (\lambda_1 + 2\lambda_2)^{-1}$. Подсчет по формуле (8.20) для скорости с волны второго рода (см. стр. 74) дает при $B \approx 0{,}01\ am^{-1}$ значения, весьма близкие замеренным Е. В. Карусом.

Скорость v_0, определенная по формуле (11.25), справедлива при условии равенства фазовых напряжений, что не наблюдается в сухих пористых средах, где возмущения давления в газе, насыщающем поры, и в скелете среды резко различны.

Формула для v_0 применима для взвесей твердых частиц в воздухе или воздушных пузырьков в воде (см. § 8). При этом сверхмалые скорости, вычисленные Ю. В. Ризниченко, объясняются тем, что плотность такой среды фактически равна плотности твердых частиц, а сжимаемость — изотермической сжимаемости газа.

Выражения для V_∞ Ю. В. Ризниченко и полученное выше для v_∞ не совпадают, причем расхождение весьма существенно. В самом деле, для водонасыщенного кварцевого песка, параметры которого приведены на стр. 74, имеем согласно формуле (11.27) $V_\infty = 3{,}15$ *км/сек*, тогда как $v_\infty = 2{,}2$ *км/сек*. Напомним в связи с этим, что, по данным той же работы, наблюдаемые скорости распространения сейсмических волн в сильно увлажненных песчаных породах

находятся в диапазоне 1,5—2,0 *км/сек*. Таким образом, величины v_0 и v_∞ близки к замеренным в практических условиях, тогда как V_∞ дает сильно завышенные значения.

Нетрудно видеть причину этого несоответствия. В самом деле, основное условие вывода выражения для V_∞ формулируется как длина волны $\Lambda \ll l$ (где l — минимальный характерный размер слоев модели среды). При переходе к реальным гетерогенным средам выражение (11.24) тем самым применимо, если только длина волны $\Lambda \ll d$, d ($\sim l$) — средний диаметр порового канала или диаметр зерна. Отсюда, например, величине $d \approx 1$ *мм* соответствует частота $\omega = 2\pi V_\infty/\Lambda \gg \omega_* = 2\pi V_\infty/d \approx 2 \cdot 10^7 1/сек$, т. е. выражение V_∞ по существу является верхним пределом скорости *ультразвуковых* волн.

Заметим, что в статье Вилли и других [326] в 1956 г. предлагалось использовать выражение (8.4) как эффективную формулу для распространения звука в насыщенных пористых средах. По оценке Геертсма [294], эта формула не соответствует физической сущности волнового процесса, хотя он и признает, что в ряде случаев формула (8.4) дает удовлетворительные результаты при звуковом (акустическом) каротаже скважин. Из работы Ю. В. Ризниченко устанавливается соответствующая этой формуле физическая картина.

М. А. Исакович [93] использовал аналогичную модель для изучения влияния различия тепловых параметров фаз на распространение звука в гетерогенной среде.

Наибольший интерес представляет вопрос: описывает ли развиваемая теория достаточно полно дисперсию скорости из-за инерционной и тепловой релаксаций в гетерогенной среде, т. е. выполняются ли равенства $\omega_t > \omega_\infty$, $\omega_* > \omega_\infty$? Естественно, такие оценки следует проводить в каждом конкретном случае. Так, в табл. 7 приведены соответствующие подсчеты для продольных волн в водонасыщенной среде с временем релаксации τ, вычисленным по проницаемости, пористости и другим параметрам (см. табл. 4).

Таблица 7

Характерная граница	Частота (в $сек^{-1}$) при времени релаксации в *сек*		Длина волны (в *см*) при времени релаксации в *сек*	
	$\tau = 10^{-3}$	$\tau = 10^{-5}$	$\tau = 10^{-3}$	$\tau = 10^{-5}$
Нижняя граница дисперсии скорости	$\omega_0 = 10^2$	$\omega_0 = 10^4$	$\Lambda_0 = 10^3$	$\Lambda_0 = 10$
Верхняя граница дисперсии скорости	$\omega_\infty = 10^3$	$\omega_\infty = 10^5$	$\Lambda_\infty = 10^2$	$\Lambda_\infty = 1$
Верхняя граница пуазейлевского течения в капилляре	$\omega_t = 10^3$	$\omega_t = 10^5$	$\Lambda_t = 10^2$	$\Lambda_t = 1$
Верхняя граница практического использования закона Дарси	$\omega_t' = 10^4$	$\omega_t' = 10^6$	$\Lambda_t' = 10$	$\Lambda_t' = 0{,}1$
Нижняя граница асимптотики ультразвука	$\omega_* = 10^6$	$\omega_* = 10^1$	$\Lambda_* \sim d = 0{,}1$	$\Lambda_* \sim d = 0{,}01$

Отсюда для наблюдаемых продольных волн следует заключение (совпадающее с рекомендациями Геертсмы): граница практической применимости закона Дарси и закона межфазового теплообмена $q = \varkappa (T_1 - T_2)$ весьма близка к границе нарушения сплошности среды, где становится необходимым изучать механизм дополнительного перехода механической энергии волн в тепловую из-за многократного рассеивания. Поэтому, если длина волны значительно больше диаметра элементарных частиц среды, развиваемая теория будет давать правильную оценку параметров движения.

§ 12. ЭЛЕКТРОСЕЙСМИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ [1]

При прохождении упругих волн в насыщенных жидкостью пористых средах наряду с другими явлениями наблюдается так называемый электросейсмический эффект. Он заключается в появлении разности электрических потенциалов между точками пористой среды, расположенными на различных расстояниях от источника волн. Электросейсмический эффект был обнаружен впервые А. Г. Ивановым [91] в 1939 г. при наблюдении за упругими волнами в поверхностных слоях почвы. А. Г. Иванов отметил, что этот эффект представляет собой одно из проявлений электрокинетических свойств насыщенных жидкостью пористых сред. Теория электросейсмического эффекта была развита Я. И. Френкелем [215].

Изложим эту теорию с некоторыми модификациями. Предварительно коротко остановимся на электрокинетических явлениях в пористых средах.

В коллоидной химии под электрокинетическими эффектами понимаются проявления связи между электрическим полем и взаимным движением фаз, одной из которых является раствор электролита (например, раствор соли в воде). В дальнейшем ограничимся системой, состоящей из частиц твердой фазы (например, частицы песка) и жидкой (электролит).

Если на эту систему наложить внешнее электрическое поле, то твердые частицы придут по отношению к жидкости в движение, получившее название *электрофореза*. Наряду с электрофорезом наблюдается и обратный эффект — при движении твердых частиц, вызванном неэлектрическими силами, в растворе возникает электрическое поле (*потенциал падения*).

Те же явления могут наблюдаться, если твердая фаза неподвижна, а роль движущейся фазы играет сам раствор (например, насыщенная электролитом пористая среда с жестким скелетом). При этом значение имеет только относительное движение фаз: оба явления — движение частиц относительно раствора и раствора относительно неподвижных стенок под действием внешнего электрического поля — одинаковы по своей физической природе. Движение раствора в электрическом поле называется *электроосмосом*. При течении раствора электролита в пористой среде под действием градиента давления возникает электрическое поле (*потенциал протекания*). Последний эффект, по существу, ничем не отличается от потенциала падения.

Механизм электрокинетических явлений связан с образованием двойного электрического слоя на границе раздела фаз. Знаки зарядов твердой и жидкой фаз могут быть различны и зависят от их природы, однако чаще всего твердая фаза заряда отрицательного знака. По современным представлениям наружная, относящаяся к жидкости, сторона двойного слоя имеет диффузное строение с постепенным убыванием плотности избыточных зарядов (ионов) при удалении от границы твердой фазы. Это связано с наличием взаимодействия между электростатическими силами и силами молекулярного теплового движения в растворе. Ионы, непосредственно прилегающие к твердой фазе (адсорбционный слой), обычно не передвигаются при электрокинетических эффектах вследствие

[1] Написан совместно П. П. Золотаревым и автором.

больших электростатических сил — смещается лишь наружная часть диффузного слоя из более рыхло расположенных ионов.

Рассмотрим электроосмотический эффект. Приложение электрического поля к наполненному электролитом капилляру заставляет ионы одного знака в наружной части диффузного слоя двигаться к противоположно заряженному полюсу. Таким образом, около стенки создается направленный поток избыточных ионов диффузного слоя. При перемещении эти ионы увлекают остальную массу жидкости в капилляре вследствие трения. В результате течения жидкости создается некоторая разность давлений, приводящая в свою очередь к вторичному течению жидкости в обратном направлении. Разность давлений возрастает до тех пор, пока не наступит стационарное состояние, когда прямой и обратный потоки жидкости не станут равны.

Явление потенциала протекания противоположно электроосмосу. Если приложить к концам капилляра разность давлений, то в нем возникнет ламинарный поток жидкости.

При течении ионы диффузного слоя смещаются и избыток ионов одного знака выносится по направлению потока жидкости. Такое движение зарядов вдоль стенки представляет собой конвективный (поверхностный) ток, который создает разность потенциалов на концах капилляра. Эта разность потенциалов в свою очередь дает начало объемному току проводимости в обратном направлении. Разность потенциалов возрастает до тех пор, пока не наступит стационарное состояние, когда конвективный (поверхностный) ток станет равным объемному. Полученная разность потенциалов называется *потенциалом протекания*.

Перейдем теперь к количественному описанию явлений электроосмоса и потенциала протекания в пористой среде.

Пусть grad Φ — градиент электрического потенциала, а grad p — градиент давления. Тогда, исходя из принципов термодинамики неравновесных процессов, при фильтрационных движениях для скорости фильтрации жидкости $\vec{W}$ и плотности тока (на единицу площади поперечного сечения пористой среды) можно написать следующие выражения:

$$\vec{W} = -L_{11}\,\mathrm{grad}\,p + L_{12}\,\mathrm{grad}\,\Phi, \qquad \vec{i} = L_{21}\,\mathrm{grad}\,p - L_{22}\,\mathrm{grad}\,\Phi. \tag{12.1}$$

Согласно принципу Онзагера $L_{12} = L_{21}$. Первый член в выражении $\vec{W}$ определяет обычное фильтрационное движение ($L_{11} = k/\mu$, k — коэффициент фильтрации), а второй — электроосмотическое движение. Коэффициент $c_э = L_{12}$ называется коэффициентом электроосмоса. Для одиночного капилляра коэффициент $c_э$ выражается следующим образом:

$$c_э = L_{12} = -\frac{D\zeta_0}{4\pi\mu}, \tag{12.2}$$

где D — диэлектрическая постоянная жидкости; ζ_0 — электрокинетический потенциал; μ — вязкость жидкости.

Для трубчатой модели пористой среды (пористости m) формула (12.2) пересчитывается так: $c_э = mD\zeta_0/(4\pi\mu)$.

В формуле для силы тока $\vec{i}$ первый член представляет конвективный (поверхностный) ток, вызываемый приложением градиента давления, а второй — объемный ток проводимости. Поэтому

$$L_{22} = m\sigma, \tag{12.3}$$

здесь σ — удельная электропроводность жидкости.

При заданном grad Φ стационарное состояние при электроосмосе наступает тогда, когда скорость фильтрации $\vec{W} = 0$. Из первой формулы (12.1) можно найти соответствующий этому состоянию grad p:

$$(\mathrm{grad}\,p)_{\max} = -\frac{L_{12}}{L_{11}}\,\mathrm{grad}\,\Phi = -\frac{c_э\mu}{k}\,\mathrm{grad}\,\Phi. \tag{12.4}$$

Подставляя это соотношение в выражение для плотности тока, получим, что при электроосмосе в стационарном состоянии сила тока равна

$$\vec{i} = -m\sigma\left(1 - \frac{c_э\mu}{m\sigma k}\right)\operatorname{grad}\Phi. \tag{12.5}$$

Формула (12.5) показывает, что вследствие электроосмоса проводимость уменьшается в $(c_э^2\mu/(mk))$ раз.

При заданном grad p стационарное состояние наступает при $i = 0$. Поэтому из второго выражения (12.1) получаем, что максимальная напряженность электрического поля равна

$$\vec{E} = -(\operatorname{grad}\Phi)_{\max} = \frac{c_э}{m\sigma}\operatorname{grad} p. \tag{12.6}$$

Используя выражение (12.6), можно найти скорость течения жидкости в стационарном состоянии

$$\vec{W} = -\frac{k}{\mu}\left(1 - \frac{c_э\mu}{m\sigma k}\right)\operatorname{grad} p. \tag{12.7}$$

Из формулы (12.7) видно, что вследствие возникновения потенциала течения коэффициент фильтрации жидкости понижается.

Из выражений (12.6) и (12.7) следует соотношение, использованное Я. И. Френкелем:

$$\vec{E} = \frac{\mu c_э}{k\sigma(1-\pi)}\vec{w}, \tag{12.8}$$

где $w = \vec{W}/m$ — средняя скорость течения жидкости; $\pi = c_э\mu/m\sigma k$.

Перейдем теперь к рассмотрению теории электросейсмического эффекта по Я. И. Френкелю [215]. Будем, как и в [215], рассматривать этот эффект применительно к первой (акустической) продольной волне. Как было показано ранее (см. § 8), в слабо сцементированной пористой среде при этом можно считать давления фаз одинаковыми в каждой точке. Так как распространение волны сопровождается изменением давления в направлении ее распространения, и насыщающую грунт воду в реальных условиях можно всегда считать электролитом, то из предыдущего ясно, что этот процесс должен также сопровождаться изменением электрического потенциала. Это явление в грубых чертах аналогично явлению потенциала протекания. Однако формулой (12.6) для количественных расчетов пользоваться, вообще говоря, нельзя по двум причинам.

Во-первых, эта формула относится к стационарному течению воды в порах и не учитывает конечную скорость установления объемного электрического тока, обусловленного силой grad Ф и компенсирующего конвективный (поверхностный) электрический ток, которым этот градиент вызывается.

Во-вторых, формула (12.6) выведена для среды с абсолютно жестким скелетом, тогда как при распространении волн в почве деформациям подвергается как жидкость, так и скелет.

Первую трудность можно обойти, если рассматривать волны, период колебаний которых достаточно велик по сравнению с временем образования потенциала протекания (с временем установления стационарного состояния). При этом значение напряженности E в каждый момент времени практически совпадает с тем, которое соответствует мгновенному значению grad p. Как указывает Я. И. Френкель, это предположение, по-видимому, справедливо вплоть до ультразвуковых частот порядка 10^6 *гц* и безусловно справедливо для сейсмических колебаний.

Для преодоления второй трудности Я. И. Френкель предполагает, что формула (12.8) справедлива и для пористой среды с деформируемым скелетом [1],

[1] Аналогичная формула, приведенная в работе [215], имеет несколько отличный от формулы (12.8) вид, а именно: $\vec{E} = \mu c_э \vec{w}/k\sigma$. В ней не учтено влияние потенциала протекания на фильтрацию.

если под скоростью жидкости в ней понимать относительную скорость жидкости $\vec{w} - \vec{u}$, т. е.

$$\vec{E} = \frac{\mu c_э}{k\sigma(1-\pi)}(\vec{w}-\vec{u}). \tag{12.9}$$

При этих условиях определение электрического поля $\vec{E}$ для продольной волны первого рода состоит в выражении разности $(\vec{w} - \vec{u})$ через смещение твердых частиц почвы $\vec{l}_1$.

Для проведения указанных вычислений воспользуемся рассмотренной ранее формулой, связывающей скалярные потенциалы φ_1 и φ_2 для продольных волн (см. § 7—8). Она имеет вид

$$\left[(1-m_0)(1-\beta_1 K)\xi^2 + i\frac{m(1-m)}{\zeta}\frac{\beta}{B}\right]\varphi_1 +$$

$$+\left[m\xi^2 - \frac{\rho_2}{\rho}\left(\frac{\beta}{B}\right) - i\frac{m(1-m)}{\zeta}\frac{\beta}{B}\right]\varphi_2 = 0, \tag{12.10}$$

$$\zeta = \frac{m^2(1-m)\rho}{r}\omega, \quad \rho = \rho_1 + \frac{1-m}{m}\rho_2, \quad \xi^2 = \frac{\eta^2}{\omega^2\rho B}.$$

Величина ξ определяется из дисперсионного соотношения (12.10).

При рассматриваемых малых частотах параметр ζ мал и ξ^2, φ_1, φ_2 можно представить следующим образом:

$$\xi^2 = \xi_0^2 + i\zeta\xi_1^2 + \ldots, \quad \varphi_1 = \varphi_1^0 + i\zeta\varphi_1' + \ldots, \tag{12.11}$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^0 + i\zeta\varphi_2' + \ldots$$

Подставляя выражение (12.11) в (12.10), получим, что в нулевом приближении $\varphi_1^0 = \varphi_2^0 = \varphi_0$, а для первого приближения находим

$$\varphi_2' - \varphi_1' = \frac{B}{\beta m(1-m)}\left(\frac{\rho_2}{\rho}\frac{\beta}{B} - [(1-m_0)(1-\beta_1 K) + m]\xi_0^2\right)\varphi_0.$$

Для слабо сцементированной пористой среды $\beta_1 K \ll 1$ и $\xi_0 = (\rho_0\beta)/(\rho B)$. Поэтому ограничиваясь членами первого приближения и имея в виду, что

$$\vec{w} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_2, \quad \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_1, \quad \vec{l}_1^0 = \operatorname{grad}\varphi_0, \quad \frac{\partial l_0}{\partial t} = -i\omega\vec{l}_1,$$

получим

$$\vec{w} - \vec{u} = -\frac{k_0\omega^2\rho_0}{\mu}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_0}\right)\vec{l}_1^0. \tag{12.12}$$

Подставляя последнее выражение в формулу (12.9), имеем для напряженности электрического поля выражение

$$\vec{E} = \frac{c_э\rho_0\omega^2}{\sigma(1-\pi)}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_0}\right)\vec{l}_0. \tag{12.13}$$

Для трубчатой пористой среды, в частности, получаем

$$\vec{E} = \frac{m_0 D\zeta_0\rho_0}{4\pi\mu\sigma(1-\pi^2)}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_0}\right)\omega^2\vec{l}_0. \tag{12.14}$$

Таким образом, при данных значениях смещений $\vec{l}_0$ возбуждаемое электрическое поле оказывается пропорциональным квадрату частоты волны и не зависит от коэффициента проницаемости пористой среды.

В заключение заметим, что, как видно из формулы (12.7), влияние электрокинетических эффектов на коэффициент затухания сейсмических волн сказывается в уменьшении коэффициента проницаемости в $(1 - \pi)$ раз.

Глава III

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

§ 13. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ О СЛАБЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА МЯГКИЕ СРЕДЫ

Нагрузка в двухфазной сплошной среде может быть приложена: только к жидкости («жидкий поршень»), к жидкости и к скелету среды («непроницаемый» или «жесткий» поршень) и, наконец, только к твердой фазе («высокопроницаемый» поршень).

При одномерных плоских движениях $u_1 = u(x, t)$, $w_1 = w(x, t)$, $u_2 = u_3 = w_2 = w_3 = 0$, $\sigma_{ij}^f = 0$, $i \neq j$, $\sigma_{11}^f = \sigma(x)$ уравнения (5.I) — (5.IV) сводятся к системе двух уравнений относительно величин σ и p (индекс «f» далее опускается)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \varepsilon h\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_*}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon\frac{q}{\tau_*}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + \varepsilon f\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 r\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{r}{\tau_*}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varepsilon\frac{qr}{\tau_*}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{13.1}$$

где

$$c^2 = \frac{1}{B\rho}, \quad \frac{1}{\tau_*} = \frac{\mu}{a_0\rho}(1 + m_0\beta_1 K), \quad \rho = \rho_1 + \frac{1-m_0}{m_0}\rho_2(1-\beta_1 K),$$

$$h = -(1-m_0)\left(\frac{\beta_1}{\beta_*}KB - \frac{\rho_2}{m_0\rho}\right), \quad r = \frac{\rho m_0}{(1-\beta_1 K)\rho_2},$$

$$q = \frac{1-m_0}{(1+m_0\beta_1 K)}\left[1 - (1-m_0)(1-\beta_1 K)\frac{\beta_1}{\beta_*}KB - m_0\frac{\beta_1}{\beta_*}KB\right],$$

$$f = \frac{1}{1-\beta_1 K}\left[1 - (1-m_0)(1-\beta_1 K)\frac{\beta_1}{\beta_*}KB\right].$$

Для мягких грунтов и горных пород, характеризуемых условием $\beta_1/B \ll 1$, при малой сжимаемости жидкости $\beta_1 \approx \beta_2 \ll B$ величина

$$\varepsilon = \beta_*/B \tag{13.2}$$

играет роль малого параметра.

Граничные условия для возмущений давления и напряжения имеют следующий вид [77, 168]: для проницаемого поршня $\sigma(0, t) = \sigma_*$, $p(0, t) = 0$; для жидкого поршня $\sigma(0, t) = 0$, $p(0, t) = p_*$, для жесткого поршня $\sigma(0, t) - p(0, t) = T_*$, $u(0, t) = w(0, t)$.

Начальные условия для всех случаев зададим в виде: $p(x, 0) = \sigma(x, 0) = 0$, $\partial p/\partial t = \partial\sigma/\partial t = 0$ $(t = 0,\ 0 < x < \infty)$.

Применяя к системе уравнений (13.1) преобразование Лапласа, получим, что указанные граничные условия перейдут соответственно в следующие: для проницаемого поршня $P(0, s) = 0$, $V(0, s) = \sigma_*/s$; для жидкого поршня $P(0, s) = p_*/s$, $V(0, s) = 0$; для жесткого поршня $V(0, s) - P(0, s) = T_*/s$, $(dV/ds) + \eta\,(dP/ds) = 0$ при $x = 0$, $\eta = (1 - m_0)(\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$. Решения указанных задач в трансформантах Лапласа в общем виде даны в работах [77, 168]. Приведем упрощенные решения для мягких грунтов, воспользовавшись условием (13.2). В пренебрежении слагаемыми порядка ε^2 и выше эти решения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} P(x, s) &= \frac{\sigma_*}{s}\,\frac{r + s\tau}{r(1 + s\tau)} \times \\ &\times\left\{1 - \varepsilon\,\frac{s^2\left(h - \dfrac{\rho_1}{\rho}\right)\tau^2 - s\tau\left[\dfrac{\rho_1}{\rho} - (r-1)(h-q) - hr - q\right] + qr}{r(1 + s\tau)^2}\right\}\times \\ &\times\left(e^{-\lambda_b x} - e^{-\lambda_a x}\right) \\ V(x, s) &= \frac{\sigma_*}{s}\left[1 - \varepsilon\,\frac{(q + hs\tau)(r + s\tau)}{r(1 + s\tau)^2}\right]e^{-\lambda_b x} + \\ &+ \varepsilon\,\frac{\sigma_*}{s}\,\frac{(q_1 + hs\tau)(r + s\tau)}{r(1 + s\tau)^2}\,e^{-\lambda_a x} \end{aligned}\right\}, \qquad (13.3)$$

$$\left.\begin{aligned} P(x, s) &= \frac{p_*}{s}\left[1 - \varepsilon\,\frac{(q + hs\tau)(r + s\tau)}{r(1 + s\tau)^2}\right]e^{-\lambda_a x} + \\ &+ \varepsilon\,\frac{p_*}{s}\,\frac{(1 + hs\tau)(r + s\tau)}{r(1 + s\tau)^2}\,e^{-\lambda_b x} \\ V(x, s) &= -\varepsilon\,\frac{p_*}{s}\left[\frac{(1 - m_0)(r-1)}{r(1 + s\tau)} - h\right]\left(e^{-\lambda_a x} - e^{-\lambda_b x}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (13.4)$$

Для жесткого поршня имеем с точностью до членов порядка $\varepsilon^{3/2}$

$$P(x, s) = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{T_*}{s}\sqrt{\frac{\rho_1 s\tau(1 + s\tau + 2b_a\tau)}{\rho r(1 + s\tau)^2}}\,\frac{\eta(r + s\tau)}{r(1 + s\tau) + \eta(r + s\tau)}\,e^{-\lambda_b x} - \\ - \frac{T_*}{s}\left[1 - \varepsilon\,\frac{rq + fs\tau}{r(1 + s\tau) + \eta(r + s\tau)}\right]e^{-\lambda_a x}, \qquad (13.5)$$

$$V(x, s) = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{T_*}{s}\sqrt{\frac{\rho_1 s\tau(1 + s\tau + 2b_a\tau)}{\rho r(1 + s\tau)^2}}\,\frac{\eta r(1 + s\tau)}{r(1 + s\tau) + \eta(r + s\tau)}\,e^{-\lambda_b x} + \\ + \varepsilon\,\frac{T_*}{s}\,\frac{q + hs\tau}{1 + s\tau}\,e^{-\lambda_a x},$$

здесь

$$2b_a = (1 - m_0)\frac{\rho (r-1)^2}{\rho_1 r\tau}, \qquad \lambda^2 = \zeta,$$

$$\zeta_{a,\,b} = \frac{s}{2c^2 r\tau}\left\{r(1+s\tau) + \varepsilon(qr + fs\tau) \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{[r(1+s\tau) + \varepsilon(qr+fs\tau)]^2 - 4\varepsilon r\tau s\left[\frac{\rho_1}{\rho}(1+s\tau) - (r-1)(h-q)\right]}\right\} \tag{13.6}$$

и под λ_a, λ_b подразумеваются те значения λ, действительная часть которых положительна.

Определим теперь *величины скачков напряжения и давления*, скорость их распространения и интенсивность затухания, для чего воспользуемся способом, отмеченным в книге [244].

Рассмотрим сначала случай приложения нагрузки при помощи высокопроницаемого поршня. Применяя к трансформанте (13.3) теорему обращения, получим следующую формулу:

$$\sigma(x, t) = S_a + S_b,$$

$$S_a = -\frac{\sigma_*}{2\pi i}\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{c^2\tau\zeta_b - s(1+s\tau)}{c^2\tau(\zeta_b - \zeta_a)} e^{st - \lambda_a x}\frac{ds}{s},$$

$$S_b = \frac{\sigma_*}{2\pi i}\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \left(1 + \frac{c^2\tau\zeta_a - s(1+s\tau)}{c^2\tau(\zeta_a - \zeta_b)}\right) e^{st - \lambda_b x}\frac{ds}{s}. \tag{13.7}$$

Заметим, что все особенности подынтегральных выражений в S_a, S_b находятся в левой полуплоскости. Если, кроме того, окажется, что показатели экспонент в выражениях (13.7) можно представить в виде

$$st - \lambda_a x = s\left(t - \frac{x}{v_a}\right) - x\xi_a(s), \qquad st - \lambda_b x = s\left(t - \frac{x}{v_b}\right) - x\xi_b(s)$$

(где $\xi_a(s)$, $\xi_b(s)$ стремится к конечному пределу при $|s| \to \infty$), то это означает, что интеграл S_a обращается в нуль при $t < x/v_a$, а интеграл S_b равен нулю при $t < x/v_b$.

Действительно, рассмотрим, например, интеграл S_a. В правой полуплоскости $s > 0$ особенностей у подынтегрального выражения интеграла S_a нет, а поэтому он сводится к интегралу по контуру полуокружности бесконечно большого радиуса, который обращается в нуль вследствие ограниченности $\xi_a(s)$ при $|s| \to \infty$ и условии $t < x/v_a$. В то же время при $t > x/v_a$ интеграл S_a отличен от нуля, а это означает, что в точке $t = x/v_a$ величина S_a претерпевает скачок (v_a является скоростью распространения этого скачка) и непрерывна справа и слева от него. Аналогично интеграл S_b изменяется скачком только в точке $t = x/v_b$ (он равен нулю при $t < x/v_b$ и отличен от нуля при $t > x/v_b$). Это означает, что величина напряжения

$\sigma(x, t)$ дважды изменяется скачкообразно: в точках $x = v_a t$ и $x = v_b t$. Другими словами, существуют две волны, распространяющиеся соответственно со скоростями v_a и v_b ($v_a > v_b$), на фронте которых напряжение $\sigma(x, t)$ изменяется скачком. Пусть на фронте первой волны напряжение изменяется от значения σ'_+ до σ'_-. Так как интеграл S_a в точке разрыва сходится к полусумме значений справа и слева, то $S_a(x = v_a t) = (\sigma'_- + \sigma'_+)/2 = [\sigma]_a/2$, где $[\sigma]_a = \sigma_- - \sigma_+$, поскольку $\sigma_+ = 0$.

С другой стороны, величина $S_a(x = v_a t)$ равна интегралу по полуокружности: $s = R \exp i\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ при $R \to \infty$. При вычислениях будем пренебрегать величинами порядка ε^2 и выше. Тогда

$$S_a(x - v_a t = -0) = \varepsilon \frac{\sigma_*}{2\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(q + h\tau R e^{i\theta})(r + \tau R e^{i\theta})}{(1 + \tau R e^{i\theta})^2} e^{-\xi_a(Re^{i\theta}) v_a t} d\theta, \tag{13.8}$$

$$\xi_a(s) = \frac{s}{v_a}\left(\sqrt{1 + \frac{(h-q)(1-r)\rho}{(1+s\tau)\rho_1}} - 1\right) \to \frac{1}{2v_a} \frac{(1-r)(h-q)}{\rho_1 \tau} =$$

$$= \frac{1}{v_a} \frac{m_0(1-m_0)}{2\tau} \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2, \qquad v_a \approx c\sqrt{\frac{r\rho}{\varepsilon\rho_1}} = \frac{1}{\sqrt{\beta\rho_\infty}} = v_\infty.$$

Отсюда получим: скорость распространения разрыва совпадает со скоростью распространения характеристических поверхностей (5.29)

$$[\sigma]_a = \varepsilon\sigma_* \frac{h}{r}(r - 1)\exp(-b_a t), \qquad b_a = \frac{m_0(1-m_0)}{2\tau} \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2, \tag{13.9}$$

где b_a — коэффициент затухания скачка напряжения на фронте первой волны, совпадающий со значением коэффициента затухания во времени гармонических продольных волн первого рода (волн сжимаемости) при $\omega \to \infty$, если вспомнить, что $b_a = \delta_a v_a$, где ω — частота колебания в волне, а δ_a — коэффициент ее затухания (при $\omega \to \infty$) по длине пути (8.13). Заметим, что напряжение в первой волне возрастает лишь на малую (порядка ε) величину.

Таким же путем получаем, что в точке $x = v_b t = ct$ с точностью до членов порядка ε^2 согласно выражению (13.3) интеграл S_b принимает следующее значение:

$$S_b(x = ct) = \frac{\sigma_*}{2\pi} e^{-t/2\tau}\left[\pi - \varepsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(r + Re^{i\theta}\tau)(q + h\tau Re^{i\theta})}{r(1 + \tau Re^{i\theta})} d\theta\right] =$$

$$= \frac{\sigma_*}{2}\left(1 - \varepsilon\frac{h}{r}\right) e^{-t/2\tau}. \tag{13.10}$$

Отсюда в силу непрерывности интеграла S_b в точке $x = ct$ получим, что на второй волне напряжение изменяется скачком на величину

$$[\sigma]_b = \sigma_*\left(1 - \varepsilon\frac{h}{r}\right)\exp(-b_b t), \qquad b_b = \frac{t}{2\tau}, \tag{13.11}$$

а коэффициентом затухания скачка является величина $b_b = 1/2\tau$. Снова $b_b = \delta_b v_b$, где δ_b, v_b — коэффициент затухания и скорость распространения гармонической продольной волны второго рода при частоте колебания $\omega \to \infty$ (см. § 8). Поскольку показатели экспонент в подынтегральных выражениях (13.3) — (13.5) (т. е. величины λ_a, λ_b) зависят только от вида уравнения (13.1), а не от граничных условий, то разрывы всех величин, если они существуют, будут распространяться с теми же скоростями и затухать с коэффициентами затухания b_a, b_b.

Используя выражение (13.3), получим, что величина скачка давления на фронте первой волны с точностью до членов порядка ε^2 будет

$$[p]_a = -\frac{\sigma_*}{r}\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\left(h - \frac{\rho_1}{\rho}\right)\right)\exp(-b_a t), \tag{13.12}$$

а на фронте второй волны —

$$[p]_b = -\frac{\sigma_*}{r}\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\left(h - \frac{\rho_1}{\rho}\right)\right)\exp(-b_b t). \tag{13.13}$$

Для жидкого поршня из преобразований (13.4) следует, что

$$[\sigma]_a = -\varepsilon p_* h \exp(-b_a t), \quad [p]_a = p_*\left(1 - \varepsilon\frac{h}{r}\right)e^{-b_a t}, \tag{13.14}$$

$$[\sigma]_b = \varepsilon p_* h \exp(-b_b t), \quad [p]_b = \varepsilon p_* \frac{h}{r}\exp(-b_b t), \tag{13.15}$$

т. е. приложенное давление распространяется скачком со скоростью фронта первой волны, тогда как на второй волне оно изменяется лишь на относительно малую величину.

Наконец, для жесткого поршня из выражений (13.5) получим с точностью до членов порядка $\varepsilon^{3/2}$

$$[\sigma]_a = \varepsilon T_* h \exp(-b_a t), \quad [p]_a = -T_*\left(1 - \varepsilon\frac{f}{r+\eta}\right)e^{-b_a t}, \tag{13.16}$$

$$[\sigma]_b = \sqrt{\varepsilon}\, T_* \sqrt{\frac{\rho_1}{m_0\rho_2}}\,\frac{\eta r}{\eta + r}\, e^{-b_b t},$$

$$[p]_b = \sqrt{\varepsilon}\, T_* \sqrt{\frac{\rho_1}{m_0\rho_2}}\,\frac{\eta}{\eta + r}\exp(-b_b t). \tag{13.17}$$

При всех трех способах приложения нагрузки давление в жидкости на первой волне возрастает на величину порядка единицы, тогда как напряжение в скелете — лишь на величину порядка ε. С другой стороны, скорость распространения v_a определяется — см. уравнение (13.8) — лишь сжимаемостью фаз. Относительное движение жидких и твердых частиц на первой волне (и во всей области между двумя волнами) происходит только из-за различия их инерционных свойств — при $\rho_1 = \rho_2$ коэффициент затухания b_a, пропорциональный вязкости жидкости, обращается в нуль, поскольку жидкость уже не будет смещаться относительно скелета пористой среды. В то же время на второй волне — волне переупаковки частиц — затухание будет всегда при $\mu \neq 0$ и $a \neq \infty$, так как здесь

деформации вызываются уже не различием инерционных свойств фаз, а переупаковкой твердых частиц [164, 166].

Наконец, отметим, что знак напряжения в области между волной давления и волной переупаковки существенно зависит от знака величины h и совпадает со знаком приложенной в сечении $x = 0$ нагрузки, только если $h > 0$. Если же $h < 0$, что наблюдается при $\rho_2/m_0\rho < KB\beta_1/\beta$, то при сжимающих нагрузках в рассматриваемой области напряжение σ оказывается растягивающим. Если считать, что двухфазная среда состоит из кварцевого песка и воды, то $h > 0$.

Интегралы типа (13.7), соответствующие разным типам приложения нагрузки, можно представить в виде

$$S_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} C_k(s)\, e^{st-\lambda_k x}\, ds.$$

В интеграле $k = a$ имеем $\lambda_a = \frac{1}{v_a^2}\sqrt{\frac{s+s_a}{s+s_b}}$. Поэтому подынтегральная функция имеет точки ветвления $s = -s_a$, $s = -s_b$. Одновременно точка $s = -s_b$ является существенно особой. Кроме того, в зависимости от вида $C_a(s)$ подынтегральная функция имеет полюсы в точке $s = 0$ или в двух точках: $s = 0$ и $s = -s_b$.

Ветвь радикала $\sqrt{(s+s_a)/(s+s_b)}$ фиксируем условием, что $\arg\sqrt{(s+s_a)/(s+s_b)}$ на действительной оси при $s > -s_b$.

При $\rho_1 \neq \rho_2$ нетрудно построить решение, соответствующее относительно *малым интервалам времени* $t \ll \tau$, для этого [77] нужно сохранить лишь первые члены в разложениях трансформант по $1/s$, а также в разложениях показателей экспонент

$$\lambda_a = -\frac{s}{v_\infty} - \frac{b_a}{v_\infty} + 0\left(\frac{1}{s}\right), \qquad \lambda_b = -\frac{s}{c} - \frac{b_b}{c} + 0\left(\frac{1}{s}\right),$$

а для оценки границ применимости получаемого при этом решения необходимо удержать в разложениях члены второго порядка малости.

Ввиду наличия существенно особой точки $s = -s_b$ вычисление интеграла S_a в общем случае затруднительно.

Однако в двух частных случаях полное решение строится достаточно просто. Так, при *равенстве плотностей фаз* (при $\rho_1 = \rho_2$) оказывается, что

$$b_a = 0, \qquad \lambda_a = -\frac{s}{v_\infty}, \qquad h - q = 0. \tag{13.18}$$

Тогда для высокопроницаемого поршня получим

$$\sigma(x,t) = \begin{cases} \sigma_*(1-\varepsilon h)\left[e^{-\frac{b_b x}{c}} + \frac{x b_b}{c}\int\limits_{x/c}^{t} e^{-b_b z}\,\frac{I_1\left(b_b\sqrt{z^2 - x^2/c^2}\right)dz}{\sqrt{z^2 - x^2/c^2}}\right] + \\ \qquad + \varepsilon\sigma_* h \quad \text{при } x \leqslant ct \\ \varepsilon\sigma_* h \quad \text{при } ct < x \leqslant v_\infty t \\ 0 \quad \text{при } x > v_\infty t. \end{cases} \tag{13.19}$$

$$p(x,t)=\begin{cases}\sigma_*\left[e^{-\frac{b_b x}{c}}+\frac{xb_b}{c}\int\limits_{x/c}^{t}e^{-b_b z}\frac{I_1\left(b_b\sqrt{z^2-x^2/c^2}\right)}{\sqrt{z^2-x^2/c^2}}\,dz\right]-\sigma_*- \\ \qquad -\varepsilon m_0\sigma_*\left\{\left(1-e^{-2b_b(t-x/c)}\right)- \\ -\frac{xb_b}{c}\int\limits_{x/c}^{t}\left(1-e^{-2b_b(t-z)}\right)\frac{I_1\left(b_b\sqrt{z^2-x^2/c^2}\right)}{\sqrt{z^2-x^2/c^2}}\,dz\right\} \quad \text{при } x\leqslant ct \\ -\sigma_*+\varepsilon\sigma_*(h+m_0) \quad \text{при } ct<x\leqslant v_\infty t \\ 0 \quad \text{при } x>v_\infty t\end{cases} \tag{13.20}$$

Для жидкого поршня

$$\sigma(x,t)=\begin{cases}-\varepsilon p_* h+\varepsilon p_* h\left\{e^{-b_b x/c}+\frac{xb_b}{c}\int\limits_{x/c}^{t}e^{-b_b z}\frac{I_1(b_b\sqrt{z^2-x^2/c^2})}{\sqrt{z^2-x^2/c^2}}\,dt\right\} \\ \qquad \text{при } x\leqslant ct \\ -\varepsilon p_* h \quad \text{при } ct<x\leqslant v_\infty t \\ 0 \quad \text{при } x>v_\infty t\end{cases} \tag{13.21}$$

$$p(x,t)=\begin{cases}p_*(1-\varepsilon h)+\varepsilon p_* h\left\{e^{-b_b x/c}+\frac{xb_b}{c}\int\limits_{x/c}^{t}e^{-b_b z}\frac{I_1\left(b_b\sqrt{z^2-x^2/c^2}\right)}{\sqrt{z^2-x^2/c^2}}dz\right\} \\ \qquad \text{при } x\leqslant ct \\ p_*(1-\varepsilon h) \quad \text{при } ct<x\leqslant v_\infty t \\ 0 \quad \text{при } x>v_\infty t\end{cases} \tag{13.22}$$

Для жесткого поршня

$$\sigma(x,t)=\begin{cases}\varepsilon T_* h & \text{при } x\leqslant v_\infty t \\ 0 & \text{при } x>v_\infty t\end{cases} \tag{13.23}$$

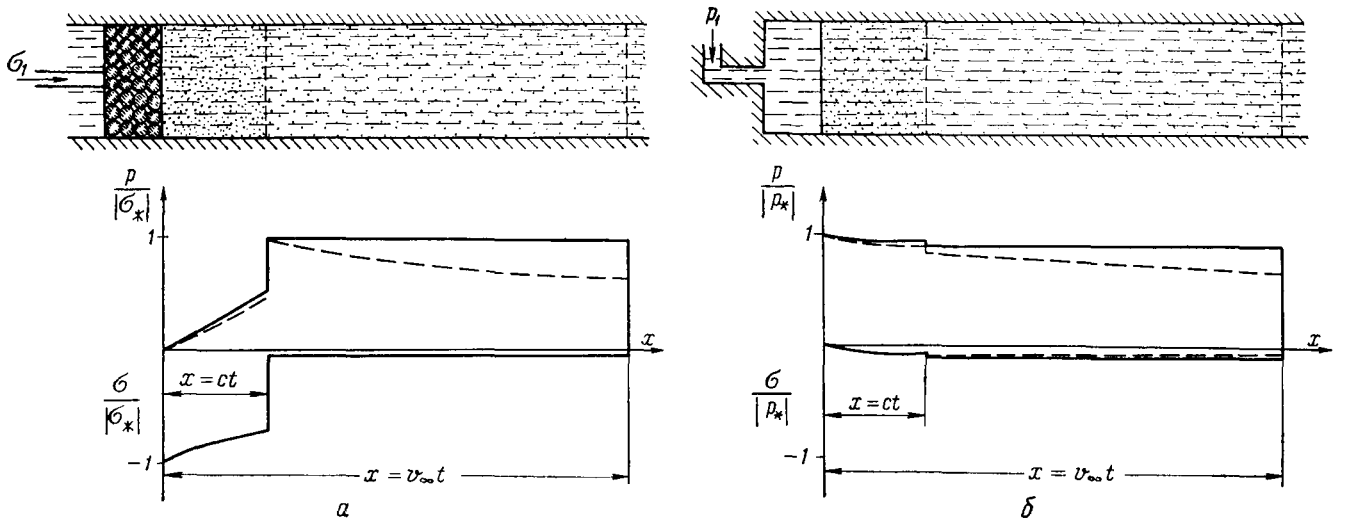
$$p(x,t)=\begin{cases}-T_*(1+\varepsilon f) & \text{при } x\leqslant v_\infty t \\ 0 & \text{при } x>v_\infty t,\end{cases} \tag{13.24}$$

тогда как на второй волне с точностью до членов порядка $\varepsilon^{3/2}$ имеем в этом случае $[\sigma]=[p]=0$.

На рис. 12 представлены эпюры напряжений и давлений для этих трех случаев в фиксированный момент времени t при условии, что напряжения $\sigma_*<0$, $T_*<0$ (сжимающие), $p_*>0$.

Поскольку известны величины скачков на фронте первой и второй волн, а также значения коэффициента затухания, можно построить примерный вид эпюр напряжений и давлений при $\rho_1\neq\rho_2$ (пунктир на рис. 12).

Другим частным случаем, для которого можно построить полное решение, является задача о слабом сжатии среды, составленной из *несжимаемых фаз*: $\beta_1=\beta_2=0$. При этом $|\lambda_a|\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, т. е. слагаемые с интегралом S_a выпадают, и, кроме того, всюду существенно упрощаются выражения $C_b(s)$.


σ_1
p_1
$\frac{p}{|\sigma_*|}$
1
x
$\frac{\sigma}{|\sigma_*|}$
$x = ct$
-1
$x = v_\infty t$
$\frac{p}{|p_*|}$
1
x
$\frac{\sigma}{|p_*|}$
$x = ct$
-1
$x = v_\infty t$

а *б*

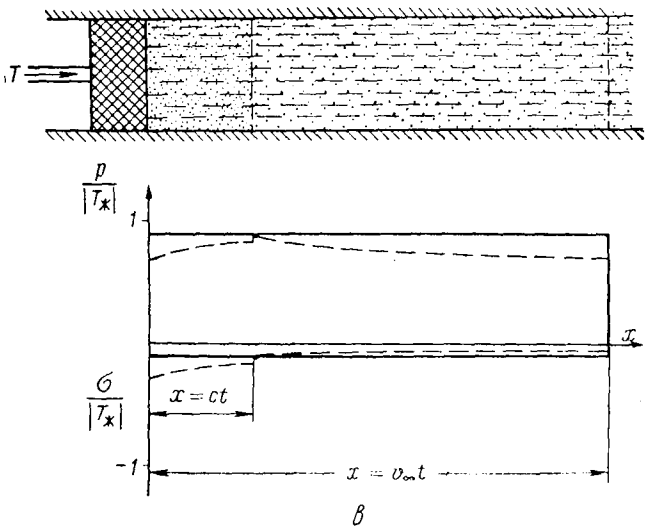


Рис. 12. Эпюры динамического распределения давления и напряжения при сжатии мягкой насыщенной среды:

а — высокопроницаемым поршнем; *б* — жидким поршнем; *в* — жестким (непроницаемым) поршнем (сплошные линии $\rho_1 = \rho_2$, пунктирные $\rho_1 \neq \rho_2$).

Однако оправданной оказывается только постановка задачи об уплотнении среды высокопроницаемым поршнем, так как лишь при приложенной нагрузке этого типа изменения на второй волне будут отличаться от нуля при $\varepsilon \to 0$. При приложении нагрузки этого типа справедливы следующие формулы для распределения фиктивного напряжения [164]:

$$\frac{\sigma}{\sigma_*} = \exp\left(-\frac{b_b x}{c}\right) + \frac{x b_b}{c}\int\limits_{x/c}^{t} e^{-b_b z}\,\frac{I_1\left(b\sqrt{z^2 - x^2/c^2}\right)}{\sqrt{z^2 - x^2/c^2}}\,dz \qquad (13.25)$$

при $t > x/c$ и $\sigma = 0$ при $t < x/c$.

Скорость смещения твердой фазы при этом оказывается равной

$$u = -\frac{\sigma_*}{1-m_0}\sqrt{\frac{B}{\rho}}\,e^{-b_b t}\,I_0\left(b_b\sqrt{t^2 - x^2/c^2}\right), \qquad (13.26)$$

а поровое давление в области $x < ct$ представляется в виде

$$p = -\sigma_* e^{-b_b t}\sqrt{\frac{B}{\rho}}\left[\left(\frac{\mu}{a_0} - \rho_2\frac{b_b}{m_0}\right)\int\limits_0^x I_0\left(b_b\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}}\right)dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_2 b_b t}{m_0}\int\limits_0^x I_1\left(b_b\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c^2}}\right)\left(t^2 - \frac{x^2}{c^2}\right)^{1/2}dx\right]. \qquad (13.27)$$

В точке $x - ct = +0$ (при подходе к ней слева) давление в жидкости будет

$$p = -\sigma_*\left[1 - e^{-2b_b t} + \frac{\rho_2}{m_0\rho}\left(e^{-2b_b t} - e^{-b_b t}\right)\right], \qquad (13.28)$$

а при $x > ct$ имеем

$$p(x, t) = -\sigma_*\left(1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho}\,e^{-2b_b t}\right) \qquad \text{при } x > ct. \qquad (13.29)$$

Вычитая из (13.28) выражение (13.29), получим, что в точке $x = ct$ давление в жидкости скачком меняется на величину

$$\Delta p = \sigma_*\frac{\rho_2}{m_0\rho}\,e^{-b_b t}. \qquad (13.30)$$

Для исследования *волны первого типа* в мягких пористых средах можно воспользоваться, как это было показано в § 5, релаксационным уравнением

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - v_\infty^2\nabla^2 p\right) + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - v_0^2\nabla^2 p\right) = 0. \qquad (13.31)$$

При этом нужно соответствующим образом изменить постановку граничных условий, считая, что вся нормальная нагрузка воспринимается поровым давлением. Следует помнить, что получаемые результаты будут справедливы с точностью до ε-малых величин.

Рассмотрим сначала вопрос о ширине фронта акустической волны давления. При этом воспользуемся полученным выше результатом, что при всех способах мгновенного приложения постоянной во вре-

мени (при $t \geqslant 0$) нагрузки для волны давления практически реализуется условие

$$p(t, x=0) = p_*, \tag{13.32}$$

здесь p_* — изменение суммарного напряжения на возмущающей границе в одномерном плоском случае при $x = 0$.

Пусть возникшая при этом слабая ударная волна распространяется по первоначально покоившейся среде, т. е. дополним условие (13.32) следующим:

$$\begin{gathered} p(x, t=0) = 0, \quad (\partial p/\partial x)_{t=0} = 0, \\ p(x \to \infty, t) = 0. \end{gathered} \tag{13.33}$$

Решение математически аналогичной задачи (относительно возмущения скорости в релаксирующей жидкости), построенное в работе И. П. Стаханова и Е. В. Ступоченко [202], имеет вид

$$p(x, t) = -\frac{p_*}{2\pi i} \int\limits_L \frac{e^{i(kx-\omega t)}}{\omega} d\omega, \qquad k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{v_0^2 - i v_\infty^2 \omega\tau}}, \tag{13.34}$$

где путь интегрирования L происходит по действительной оси плоскости ω с обходом начала координат по верхней полуплоскости. При $t < x/v_\infty$ возмущение отсутствует, а при $(t - x/v_\infty) = t' > 0$ для малых величин $t' \ll \tau$ решение, выражающееся через функции Бесселя, имеет вид

$$\begin{gathered} p(x, t) = p_* \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x}{v_\infty \tau}\left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)\right] J_0\left(-2i\sqrt{At'}\right), \\ A = \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)\frac{x}{v_\infty \tau}. \end{gathered} \tag{13.35}$$

Поскольку $J_0(2i\sqrt{At'}) \approx 1$ при $t' \ll \tau$, то решение приближенно можно записать как

$$\begin{gathered} p(x, t) = 0, \qquad t - \frac{x}{v_\infty} < 0, \\ p(x, t) = p_* \exp\left[-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)\frac{x}{v_\infty \tau}\right], \qquad 0 < t - \frac{x}{v_\infty} \ll \tau. \end{gathered} \tag{13.36}$$

При $x \gg v_\infty \tau$ разрыв практически размывается, в эти моменты времени решение представляется в виде

$$\begin{gathered} p(x, t) = \frac{p_*}{2} \Phi\left[\frac{v_0 t - x}{\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1\right) v_0 \tau x}} + 1\right], \\ \Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^z e^{-1/2\eta^2} d\eta. \end{gathered} \tag{13.37}$$

Как нетрудно видеть, решение (13.37) соответствует представлению среды в виде жидкости с объемной вязкостью, вызываемой инерционной релаксацией (см. (8.31), а также [311]). Согласно (13.37) ширина размывающегося фронта слабой ударной волны при $t' \gg \tau$ определяется формулой

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} - 1\right) v_0 \tau x} = \sqrt{\frac{\eta}{\rho_0} \frac{x}{v_0}}. \tag{13.38}$$

Для водонасыщенного кварцевого песка ($v_0 = 1{,}9$ *км/сек*, $v_\infty = 2{,}2$ *км/сек*, $\tau = 10^{-3}$ *сек* — см. стр. 76) формулой (13.38) можно пользоваться при $x \gg 2{,}2$ *м*. Имеем: $\delta = 7{,}3$ *м* при $x = 10^2$ *м*; $\delta = 22{,}2$ *м* при $x = 10^3$ *м*; $\delta = 73$ *м* при $x = 10^4$ *м*.

А. Г. Багдоев [4] исследовал решение уравнения (13.31), полученного им путем линеаризации системы уравнений Х. А. Рахматулина для полупространства при задании на поверхности осесимметричного граничного условия

$$p(x, y, 0, t) = \begin{cases} p_*(r, t), & r < R(t) \\ 0, & r > R(t) \end{cases} \tag{13.39}$$

и начальных условиях покоя $p = 0$, $\partial p/\partial t = 0$ при $t = 0$. Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение строится с использованием преобразования Лапласа и для трансформанты давления $P(x, y; s)$ имеет вид

$$P(x, y; s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{1}{R_0} \exp\left(-\frac{R_0}{v_\infty} s \sqrt{\frac{s_1 - s}{s_2 - s}}\right) p_*(r, t)\, dx_0\, dy_0, \tag{13.40}$$

где

$$s_1 = 1/\tau, \quad s_2 = v_0^2/(v_\infty^2 \tau), \quad R_0 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 + y)^2 + z^2}.$$

Далее А. Г. Багдоев разлагает подынтегральное выражение по степеням s^{-1} и ограничивается первым членом разложения, что соответствует построению асимптотического решения, справедливого в начальные моменты времени

$$p(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\int_D \frac{p(r, t - R_0/v_\infty)}{R_0}\, dx_0\, dy_0 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int\int_D \frac{1}{R_0} \int_{f(r)}^{t - R_0/v_\infty} p_*(r, \zeta)\, d\zeta \int_{s_2}^{s_1} e^{s(t-\zeta)} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{sR_0}{v_\infty} \sqrt{\frac{s_1 - s}{s_2 - s}}\right) ds\, dx_0\, dy_0, \tag{13.41}$$

где границей области интегрирования D служит поверхность $r^* = R(t - R_0/v_\infty)$; $f(r) = t$ — функция, обратная $r = R(t)$.

§ 14. ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ

В теории медленного уплотнения (консолидации) грунтов ($K \sim 10^2$—10^3 *am*, $\varepsilon \ll 1$) рассматриваются такие условия деформации, при которых смещения имеют порядок $B\Gamma L_i$ (где Γ — суммарная величина нагрузки) и пренебрегают смещениями порядка $\beta\Gamma L_i$. Поэтому там не рассматриваются задачи о деформациях грунтов при приложении нагрузки со стороны жидкости ($F_{ij}^* = 0$) или же при сжатии грунта проницаемым поршнем без возможности оттока жидкости ($w_i = u_i$ на S). Действительно, в этих случаях согласно первой из оценок (5.30) смещения будут весьма малы. Отсюда в теории консолидации допустимо пользоваться системой уравнений (5.24), приближенно описывающих вторую волну, причем вследствие медленности процесса оттока жидкости, естественно, можно пренебречь, как это обычно делается, инерционными членами.

Систему (5.24) можно представить в виде [193]:

$$(1-m_0)\,\lambda_2\nabla^2 l_1 + (1-m_0)\,(\lambda_1+\lambda_2)\,\frac{\partial e}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0,$$

$$(1-m_0)\,\lambda_2\nabla^2 l_2 + (1-m_0)\,(\lambda_1+\lambda_2)\,\frac{\partial e}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \qquad (14.1)$$

$$\nabla^2 e = \frac{B\mu}{a_0}\,\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Такая форма уравнений консолидации позволяет ставить только одно физически очевидное начальное условие $e = 0$, не налагая никаких условий на касательные напряжения и давление в жидкости, и решать задачи в перемещениях.

Существует и другой способ решения неодномерных задач консолидации. По К. Терцаги [206] давление в ходе процесса консолидации при $t \geqslant 0$ изменяется даже в неодномерном случае согласно уравнению теплопроводности

$$\partial p/\partial t = c_v\nabla^2 p, \quad c_v = a_0/\mu B. \qquad (14.2)$$

Уравнение (14.2) действительно является следствием системы уравнений (5.36) или (14.1) в *одномерном* случае. Можно показать, что решение уравнений (13.25)—(13.30) о волне переупаковки при медленном сжатии среды высокопроницаемым поршнем переходит в решение уравнения (14.2). В самом деле, при этом скачки давления и напряжения можно считать полностью размывшимися и из формулы (13.27) следует:

$$p(x, t) = -\sigma_* \frac{2}{\pi} \int_0^{x/2\sqrt{c_v t}} e^{-u^2}\,du, \qquad (14.3)$$

что соответствует граничному условию $\sigma(0, t) = \sigma_*$, $p(0, t) = 0$ и начальному $p(x, 0) = -\sigma_*$.

Наиболее важная для процесса консолидации характеристика — скорость оседания (движения) поршня u_t — определяется из выражения (13.26), если

положить $x = 0$. При больших значениях параметра $b_b t$ для u_t имеет место асимптотическое выражение

$$u_t = -\frac{\sigma_*}{1-m_0}\sqrt{\frac{B}{\rho}}\frac{1}{\sqrt{2\pi b_b t}} = -\frac{\sigma_*}{1-m_0}\sqrt{\frac{a_0 B}{\pi\mu_0 t}}, \qquad (14.4)$$

совпадающее с соотношениями, полученными в теории консолидации [206, 214] при использовании уравнения (14.2). Так как при обычных значениях параметров среды и потока величина $b_b t$ становится весьма большой уже в первые мгновения, то величина осадки поршня, рассчитанная по формуле

$$l_t = -\frac{\sigma_*}{1-m_0}\sqrt{\frac{B}{\rho}}\frac{2a_0\rho}{\mu}\int_0^{b_b t} e^{-y} I_0(y)\, dy, \qquad (14.5)$$

будет отличаться от соответствующего выражения в теории консолидации [212]:

$$l_t = -\frac{2\sigma_*}{1-m_0}\sqrt{\frac{a_0 B t}{\pi\mu}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sigma_* B}{(1-m_0)}\sqrt{c_v t} \qquad (14.6)$$

на относительно малую величину, соответствующую осадке в первый момент времени.

Решение задач консолидации в напряжениях требует предположения о мгновенном возрастании порового давления во всей области пласта. Н. Н. Веригин [43] отмечал расхождение постановки такого начального условия с представлениями упругого режима фильтрации, где используют уравнение типа (14.2), но полагают $p(x, t = 0) = 0$. В. А. Флорин [213] объяснял эффект появления ненулевого начального распределения давления деформируемостью скелета пористой среды, а начальное нулевое условие для давления считал оправданным для среды с жестким скелетом.

Результаты анализа волновых процессов, проведенного в предыдущем параграфе, говорят о том, что равенство начального порового давления при консолидации величине прикладываемой нагрузки обусловлено существованием волны давления, распространяющейся в силу неравенства $\varepsilon \ll 1$ в мягких грунтах бесконечно быстро по сравнению со скоростью развития деформаций переупаковки.

Расчет процесса консолидации с использованием уравнения теплопроводности подкупает своей простотой. Соответствующая полная схема расчета *неодномерных* задач была развита В. А. Флорином [214] и использована для ряда конкретных задач (см., например, [223]). Согласно В. А. Флорину в любой момент времени $t \geqslant 0$ распределение суммарных напряжений в грунте такое же, как и при равновесии в обычном упругом теле, но при $t = 0$ сумма нормальных фиктивных напряжений равна нулю (объемных деформаций нет, соответствующая нагрузка воспринимается жидкостью). В последующем давление изменяется по Терцаги, согласно уравнению теплопроводности, гидростатически меняются и нормальные напряжения. Таким образом, по В. А. Флорину «. . . касательные напряжения в скелете возникают сразу после приложения какой-либо нагрузки и в дальнейшем при постоянном нарастании нормальных напряжений

и соответствующих им объемных деформаций остаются неизменными» ([214], т. II, стр. 150), «... дополнительные касательные напряжения, возникающие в начальный момент мгновенного приложения нагрузки, равны своим конечным значениям» (стр. 45 монографии [212]).

В то же время из предыдущего анализа следует, что при прохождении волны давления касательные напряжения ε-малы. Затем часть их развивается (достаточно быстро по сравнению с характерными временами консолидации) согласно уравнению (5.38). Таким образом, практически при $t = 0$ в грунте возникают только касательные напряжения, связанные с эквиволюмиальной волной. Касательные напряжения, определяемые волной расширения,— см. уравнение (5.37) — развиваются в ходе процесса консолидации.

Что касается распределения давления, то действительно в согласии с В. А. Флориным при $t = 0$ уже существует стационарное распределение давления, удовлетворяющее уравнению Лапласа $\nabla^2 p = 0$ и граничным условиям, которые получаются из заданных для двухфазной среды в предположении — см. соотношение (5.39), что вся нормальная нагрузка (с точностью до пренебрежимой ε-малой поправки) воспринимается только давлением в жидкости [1]. Однако из системы (14.1) следует, что при $t > 0$ давление в жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p = \frac{a_0}{B\mu_0} \nabla^4 p, \tag{14.7}$$

т. е. рассмотрение уравнения теплопроводности вместо уравнения (14.7) аналогично замене в теории упругости известного бигармонического уравнения на уравнение Лапласа, что, как известно, допустимо лишь в частных случаях (например, в плоском одномерном и плоском осесимметричном — см. ниже, стр. 127). Расчеты давления по методу Терцаги и по системе (14.1) сопоставлялись на одном частном примере в работе [273], было отмечено существенное различие в получающихся распределениях давления в жидкости.

Учет инерционных членов, который приводит к уравнениям (5.36), нужен для изучения нестационарного процесса деформирования при приложении нагрузки со стороны жидкости или при помощи непроницаемого поршня, когда исключен также ее отток через другие границы, а в задачах консолидации — для оценки времени установления начального давления. Определение напряжений в скелете среды связано с нахождением областей, где могут проявиться опасные пластические течения грунта [2].

---

[1] Этот общий результат подтверждается рассмотрением плоской задачи о консолидации полубесконечного насыщенного грунта ступенчатой, полубесконечной нагрузкой [176], согласно которому при $t = 0$ мгновенно возникшее распределение порового давления соответствует такому же приложению нагрузки, но со стороны жидкости.

[2] Условие появления пластических деформаций (разрушения) мягкого водонасыщенного грунта формулировалось Терцаги [206] как обычное условие Кулона [200], но относительно фиктивных (эффективных) напряжений.

Остановимся теперь кратко на работе [256], в которой излагается общий метод решения задач медленного деформирования насыщенной пористой среды. При этом Био исходит из системы уравнений (§ 6), эквивалентной системе (5.I)—(5.IV), (5.VI), пренебрегая, естественно, инерционными силами. В этом случае относительно перемещений фаз $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ система (5.I)—(5.IV), (5.VI) запишется (см. табл. 2) в виде

$$\left.\begin{aligned} (1-m_0)\,\lambda_2\,\nabla^2\vec{l}_1+(P+Q-(1-m_0)\,\lambda_2)\,\operatorname{grad} e+\\ +(Q+R)\operatorname{grad}\epsilon=0\\ \operatorname{grad}(Qe+R\epsilon)=b\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{l}_2-\vec{l}_1)\\ P=A+2\,(1-m_0)\,\lambda_2=A+2N \end{aligned}\right\}. \tag{14.8}$$

Введем теперь новые неизвестные $\vec{l}_0$ и φ, такие, что

$$\vec{l}_1=\vec{l}_0-\frac{R+Q}{H}\operatorname{grad}\varphi,\quad \vec{l}_2=\vec{l}_0+\frac{P+Q}{H}\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\vec{l}_2-\vec{l}_1=\operatorname{grad}\varphi, \tag{14.9}$$

где $H=P+R+2Q$ (см. табл. 2). Тогда система (14.8) примет вид:

$$(1-m_0)\,\lambda_2\,\nabla^2\vec{l}_0+(H-(1-m_0)\,\lambda_2)\operatorname{grad} e_0=0, \tag{14.10}$$

$$(Q+R)\,e_0+K_*\,\nabla^2\varphi=b\,\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad e_0=\operatorname{div}\vec{l}_0,\quad K_*=\frac{PR-Q^2}{H}, \tag{14.11}$$

причем если равенству смещений $\vec{l}_1=\vec{l}_2$ при $t=0$ соответствует начальное условие $\varphi=0$. Уравнения (14.10) могут быть решены отдельно от (14.11) и совпадают с уравнениями обычной теории упругости. Их общее решение, определяемое методом Бусинеска — Папковича, имеет вид

$$\vec{l}_0=-\operatorname{grad}(\psi_0+\vec{r}\vec{\psi})+\frac{2H}{H-N}\,\vec{\psi}, \tag{14.12}$$

где вектор $\vec{r}$ имеет компоненты x_1, x_2, x_3, а функции ψ_0, $\vec{\psi}$ удовлетворяют уравнению Лапласа: $\nabla^2\psi_0=0$, $\nabla^2\vec{\psi}=0$.

Из уравнений (14.11) в силу следующего из (14.10) условия $\nabla^2 e_0=0$ получим

$$\varphi=\frac{Q+R}{b}\int_0^t e_0\,dt+\varphi_1, \tag{14.13}$$

где φ_1 удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$K_*\,\nabla^2\varphi_1=b\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}, \tag{14.14}$$

а величина e_0 может быть выражена через векторную функцию ψ

$$e_0 = \operatorname{div} \vec{l}_0 = \frac{2H}{H-N} \operatorname{div} \vec{\psi}. \tag{14.15}$$

Отмечая этот метод решения общей задачи консолидации, Био предлагает для дальнейшей детализации решения применять интегральное преобразование Лапласа [207].

Другой способ построения решения, предложенный Био в той же работе [256], применим в задачах о плоской деформации и основан на введении функций напряжения Эйри $F(x_1, x_2)$:

$$\sigma_{11} - p = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = p - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{14.16}$$

При этом система уравнений равновесия среды сразу удовлетворяется, а функция $F(x_1, x_2)$ и давление в жидкости p определяются из системы уравнения совместности деформации

$$(PR - Q^2) \nabla^4 F + 2N (Q + R) m_0 \nabla^2 p = 0 \tag{14.17}$$

и уравнения относительного движения жидкости

$$(PR - Q^2 - NR) m_0 \nabla^2 p - b m_0 (H - N) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{b}{2} (Q + R) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 F. \tag{14.18}$$

Исключение отсюда функции F приводит к уравнению

$$K \nabla^4 p = b \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p \tag{14.19}$$

того же типа, что и уравнение (14.7), тогда как для функции напряжений F справедливо следующее уравнение:

$$K \nabla^6 F = b \frac{\partial}{\partial t} \nabla^4 F. \tag{14.20}$$

Эти результаты можно использовать при исследовании уплотнения сцементированных насыщенных сред (скальных пористых, водонасыщенных пород).

Био показывает далее, что при отсутствии деформации чистого сдвига ($\vec{\psi} = 0$) давление в жидкости будет удовлетворять обычному уравнению теплопроводности ($K \nabla^2 p = b (\partial / \partial t) p$). Примерами такого деформирования служит одномерная задача консолидации Терцаги — см. уравнения (14.3) — (14.6), а также указанные Геертсма [291] осесимметричные процессы уплотнения в условиях плоскодеформированных и плоско-напряженных состояний. В первом из этих двух типов осесимметричных задач эффективным оказывается уравнение теплопроводности

$$\frac{k}{\mu} \nabla^2 p = \left\{ \beta_1 (1 - m_0) (1 - \beta_1 K) + \beta_2 m_0 + \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{(1 - (1 - m_0) \beta_1 K)^2}{(1 - m_0) K} \right\} \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{14.21}$$

а для задач второго типа:

$$\frac{k}{\mu}\nabla^2 p = \left\{\beta_1(1-m_0)(1-\beta_1 K) + \beta_2 m_0 + \frac{2}{3}(1+\nu)\frac{(1-(1-m_0)\beta_1 K)^2}{(1-m_0)K}\right\}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{14.22}$$

Для мягких пористых сред уравнения (14.21), (14.22) существенно упрощаются и описывают осесимметричную консолидацию, причем в согласии с изложенным выше их применение оправдано при приложении нагрузки типа «высокопроницаемый поршень», обеспечивающей отток жидкости из системы. Ранее, в работе Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [66], рассматривалось стационарное распределение напряжений при плоской деформации насыщенного жидкостью мягкого пористого пласта ($\beta_1 K \ll 1$ — сжимаемостью твердых частиц пренебрегалось).

Уравнение теплопроводности применялось для решения многих задач консолидации [214, 223], в том числе таких, где оно не может заменить уравнения (14.7). К сожалению, вопрос о существенности вносимой при этом ошибки остается открытым. В то же время лишь в немногих задачах использовалась система (14.1).

Био рассмотрел плоскую задачу об осадке полубесконечного грунта под действием прямоугольно распределенной нагрузки [255]. При этом предварительно ищутся ограниченные на бесконечности смещения l_1, l_2 и возмущение порового давления p из-за приложения к свободной поверхности синусоидально распределенного нормального фиктивного напряжения

$$\sigma_{22}^f = (1-m_0)\left(\lambda_1 \mathrm{e} + 2\lambda_2 \frac{\partial l_2}{\partial x_2}\right) = -A\sin ax_1, \quad x_2 = 0 \tag{14.23}$$

при отсутствии на ней касательных напряжений и порового давления. Соответствующее решение системы (14.1) в трансформантах Лапласа имеет вид

$$l_1 = \left[C_1 a\mathrm{e}^{-ax_2} + C_2 a\mathrm{e}^{-(a^2+s/c_v)^{1/2}x_2} - C_3(1-ax_2)\mathrm{e}^{-ax_2}\right]\cos ax_1,$$

$$l_2 = \left[-C_1 a\mathrm{e}^{-ax_2} - C_2\left(a^2+\frac{s}{c_v}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\left(a^2+\frac{s}{c_v}\right)^{1/2}x_2} - C_3 a x_2 \mathrm{e}^{-ax_2}\right]\sin ax_1, \tag{14.24}$$

$$p = \left[C_2\frac{s(1-m_0)}{c_v B}\mathrm{e}^{-\left(a^2-\frac{s}{c_v}\right)^{1/2}x_2} - 2C_3 G a\mathrm{e}^{-ax_2}\right]\sin ax_1,$$

где $G = (1-m_0)\lambda_2$, $c_v = a_0/B\mu$, а постоянные C_1, C_2, C_3 определяются указанными условиями на поверхности грунта ($x_2 = 0$):

$$\left.\begin{aligned} C_2\frac{s}{c_v} - 2G\frac{B}{1-m_0}aC_3 &= 0 \\ C_1 a^2 + C_2\left(a^2 + \frac{s(1-m_0)}{2Gc_v B}\right) - C_3 a &= \frac{A}{2G} \\ -C_1 a - C_2\left(a^2+\frac{s}{c_v}\right)^{1/2} + C_3 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{14.25}$$

Био рассматривает прогиб грунта, т. е. $l_2^0 = l_2(x_1, x_2 = 0)$, и находит для него следующее выражение ($\nu = {}^1/_2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)^{-1}$):

$$l_2^0 = \frac{A\sin ax_1}{2Ga}\left\{-\nu\left[1-e^{-a^2\nu c_\nu t}+e^{-a^2\nu c_\nu t}\ \mathrm{erf}\left(a\sqrt{(1-\nu)\,c_\nu t}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+(1-\nu)\,\mathrm{erf}\left(a\sqrt{c_\nu t}\right)\right\} = \frac{BA\sin ax}{(1-m_0)\,a}F\left(\nu,\ a\sqrt{c_\nu},\ t\right), \qquad (14.26)$$

где $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-u^2}\,du$ — интеграл вероятности. Осадка l_2^* под действием изменяющейся скачком нагрузки $\sigma_{22}=0$ при $x_1<0$, $\sigma_{22}=\sigma_*$ при $x_1>0$ определяется из выражения

$$l_2^* = \frac{2B\sigma_*}{1-m_0}\sqrt{\frac{c_\nu t}{\pi}}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{F(\nu,\alpha)}{\alpha^2}\sin\left(\frac{x_1\alpha}{\sqrt{c_\nu t}}\right)d\alpha\right\}. \qquad (14.27)$$

Био получает аналитическое выражение для l_2^* в частном случае $\nu = 0$

$$l_2^*(\nu=0) = 2\frac{B}{1-m_0}\sigma_*\sqrt{\frac{c_\nu t}{\pi}}\left[\frac{1}{2}+f\left(\frac{x}{\sqrt{c_\nu t}}\right)\right], \qquad (14.28)$$

$$f(\xi) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\xi\ln\left(1+\frac{4}{\pi\xi^2}\right)+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\xi}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\xi}{3{,}24+\xi^2}.$$

При $\nu \neq 0$ приходится прибегать к численному счету. В работе В. З. Партона [176] вычислялись графики зависимости $l_2^*(x_1)$ для различных моментов времени, а также изменение во времени порового давления. Как и следовало ожидать, постановка начального условия по Био ($e = 0$) соответствует такому начальному распределению давления

$$p(x_1, x_2, 0) = \sigma_*\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_1}{x_2}\right), \qquad (14.29)$$

которое наблюдается при приложении к свободной поверхности ($0 \leqslant x_1 \leqslant \infty$) постоянной нагрузки типа жидкий поршень. Стационарное решение (14.29), получающееся при приложении нагрузки со стороны жидкости, хорошо известно в литературе [181, 214].

Рассмотрим теперь общий способ построения некоторых решений системы (14.1), предложенной Мак Нами и Гибсоном [309]. Прежде всего эту систему в плоском случае можно записать в виде

$$\nabla^2 l_x + (2\eta-1)\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{1}{(1-m_0)\,\lambda_2}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\nabla^2 l_y + (2\eta-1)\frac{\partial e}{\partial y} - \frac{1}{(1-m_0)\,\lambda_2}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad (14.30)$$

$$\nabla^2 e = \frac{1}{c_\nu}\frac{\partial e}{\partial t}, \quad 2\eta-1 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2}.$$

Из первых двух уравнений (14.30) следует

$$\nabla^2 (\sigma + 2(1-m_0)\lambda_2 \eta e) = 0, \tag{14.31}$$

т. е. можно полагать

$$\sigma = 2(1-m_0)\lambda_2 \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \eta e\right), \tag{14.32}$$

где S — функция x и y, удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Далее вводится функция $E(x, y)$ такая, что

$$l_x = -\frac{\partial E}{\partial x} + x_2 \frac{\partial S}{\partial y}, \quad l_y = -\frac{\partial E}{\partial y} + y \frac{\partial S}{\partial y} - S, \tag{14.33}$$

а следовательно,

$$e = \nabla^2 E, \quad \sigma = 2(1-m_0)\lambda_2 \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \eta \nabla^2 E\right). \tag{14.34}$$

Тогда система уравнений (14.30) сводится к следующим двум:

$$c_v \nabla^4 E = \nabla^2 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \nabla^2 S = 0.$$

В осесимметричном случае система уравнений консолидации представляется в виде

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right) l_r - (2\eta - 1)\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{(1-m_0)\lambda_2}\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\nabla^2 l_z - (2\eta - 1)\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{(1-m_0)\lambda_2}\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad c_v \nabla^2 e = \frac{\partial e}{\partial t}, \tag{14.35}$$

где l_r, l_z — компоненты смещения твердой фазы по осям r, z, и вполне аналогично

$$l_r = -\frac{\partial E}{\partial r} + z\frac{\partial S}{\partial r}, \quad l_z = -\frac{\partial E}{\partial z} + z\frac{\partial S}{\partial z} - S, \tag{14.36}$$

$$c_v \nabla^4 E = \nabla^2 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \nabla^2 S = 0. \tag{14.37}$$

Решение собственно уравнений (14.37) предлагается строить с использованием метода интегральных преобразований [207].

Метод Мак Нами — Гибсона был использован при решении осесимметричной задачи уплотнения насыщенного полупространства под действием приложенной к свободной поверхности нормальной нагрузки [177], где вычислена величина прогиба при сосредоточенной силе, приложенной к скелету, и при равномерно распределенной по площади круга. Контактная задача была рассмотрена В. З. Партоном (178). Задачи со сферической симметрией изучались Иосселин де Жонтом (J. Appl. Phys., vol. 24, N 7, 1953, LGM — Mededelingen, vol. 7, 1963, p. 57; vol. 8, 1964, pp. 25 and 53).

Отметим здесь обзор работ по теории консолидации, выполненный Дерзким, а также опубликованные им статьи [281]. В первой из них для общей системы уравнений консолидации Био (т. е. для системы (5.I)—(5.V) без инерционных сил) выписывается выражение для работы внешних сил, а затем обобщается теорема Бетти классической теории упругости о взаимности перемещений на

рассматриваемый случай двухфазной среды (см. также статью Геертсма [298]). Затем с использованием полученных результатов выписывается решение задачи о распределении порового давления и смещений фаз в бесконечной среде при воздействии точечного источника жидкости. Во второй статье Дерзкий выписывает уравнение сплошности двухфазной среды (13.4), а также получает только что указанное решение непосредственно из уравнений квазистатического равновесия в форме Био.

На последнем этапе консолидации глин (так называемая вторичная консолидация) становятся заметными вязко-упругие деформации скелета среды [223]. Вязко-упругие деформации сдвига изучались в работах Мерчента, Тейлора [316], В. А. Флорина [214] и других [1]. Тан Тьонг Ки, воспользовавшись интегральным преобразованием Лапласа, рассмотрел классическую задачу одномерной плоской консолидации грунта, обладающего сдвиговой вязкостью [205]. Полученное решение нетрудно обобщить таким образом, чтобы учесть существенную для грунтов объемную вязкость.

Объемная вязкость пористых сред исследовалась Рейнером [188] и другими. В работах Рейнера [188] отмечались следующие характерные данные: объемная вязкость асфальта при расширении $\zeta = 2{,}9 \cdot 10^{12}$ *пз*, объемная вязкость бетона при сжатии $\zeta = 9{,}4 \cdot 10^{17}$ *пз*. Можно думать, что подобные свойства присущи и некоторым естественным пористым горным породам. Так, Геертсма отмечает [292], что объемная вязкость существенна у известняков и доломитов.

В вязко-упругом теле (Максвелла) связь между напряжением и объемной деформацией определяется соотношением [216]

$$\dot{e} = \frac{\dot{\sigma}}{K} + \frac{\sigma}{\zeta},$$

и характерное время релаксации напряжения после задания деформации среды оказывается равным $\tau = \zeta/K$. Пусть $K \sim (10^3 - 10^5)$ *am*. Тогда значениям $\zeta \sim (10^{12} - 10^{17})$ *пз* соответствует диапазон изменений $\tau \sim (10^5 - 10^9)$ *сек* = = 1 сутки—10^4 суток — характерное время объемного вязкостного течения по порядку величины может быть весьма близко к характерным временам обычных квазистатических процессов деформирования пористых сред (консолидация, упругий режим фильтрации).

Рейнер отмечает, что если необратимое изменение плотности пористого материала под действием изотропной нагрузки растягивается во времени, то мы имеем дело с объемным вязкостным течением. Если же это изменение происходит мгновенно, то оно описывается законами объемной пластичности, т. е. необратимые деформации при быстром (например, ударном) нагружении носят пластический характер.

Формулировке законов объемной и сдвиговой пластической деформаций (и их взаимодействия) посвящена обширная литература, в том числе [172, 175, 216]. Обсуждение этой проблемы выходит за намеченные рамки настоящей книги.

§ 15. СКАЧКИ ДАВЛЕНИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В СИЛЬНО СЦЕМЕНТИРОВАННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Для нахождения скоростей распространения v_a, v_b и коэффициентов затухания b_a, b_b скачков давления и напряжения в сцементированных насыщенных пористых средах воспользуемся отмечавшимся

[1] См. также Ю. К. Зарецкий «Теория консолидации грунтов». М., изд-во «Наука», 1967; G. de Josselin de Jong. Geotechnique, June, 1968, p. 125—228.

уже выше фактом [83], что эти скорости совпадают с предельными (при $\omega \to \infty$) скоростями распространения гармонических волн, а коэффициенты затухания b_a, b_b связаны с соответствующими предельными значениями коэффициентов δ_a, δ_b следующим образом:

$$b_a = \delta_a v_\infty, \quad b_b = \delta_b c \quad (\omega \to \infty).$$

Коэффициенты затухания δ_a, δ_b можно найти из общего дисперсионного уравнения (7.4) продольных волн, если воспользоваться следующим приемом. Представим величину ξ^2 при больших частотах в виде

$$\xi^2 = \xi_0 + \frac{i}{\omega\tau}\xi_1. \tag{15.1}$$

Тогда уравнение (7.4) в пренебрежении величинами $(\omega\tau)^{-2}$ дает для членов порядка $(\omega\tau)^0 = 1$

$$\xi_0 + M_1\xi_0 + M_3 = 0, \tag{15.2}$$

а для членов порядка $(\omega\tau)^{-1}$ равенство

$$\xi_1 = \frac{M_2\xi_0 - M_3}{2\xi_0 + M_1}. \tag{15.3}$$

Так как имеем — ср. уравнения (7.8)—(7.10)

$$\frac{\eta}{\omega} = \sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}\sqrt{\xi_0 + \frac{i}{\omega\tau}\xi_1} \approx \sqrt{\xi_0}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}} + \\ + \frac{1}{2}\frac{i}{\omega\tau}\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_0}}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}, \tag{15.4}$$

$$\frac{1}{v_\infty} = \sqrt{\xi_0}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}, \quad \delta_a = \frac{\xi_1}{2\tau\sqrt{\xi_0}}\sqrt{\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}}, \tag{15.5)—(15.6}$$

то, как и следовало ожидать, уравнение (15.2) принимает вид

$$\left(\frac{B\rho_1\rho_0}{m_0\rho_\infty}\right)^2 M_3 v_\infty^4 + M_1\frac{B\rho_1\rho_2}{m_0\rho_\infty}v_\infty^2 + 1 = 0. \tag{15.7}$$

Уравнение (15.7), как нетрудно показать, совпадает с уравнением характеристик системы (13.1), определяющим скорость распространения фронтов возмущенных состояний (фронтов волн).

Для коэффициентов затухания скачков во времени имеем

$$b_i = \delta_i v_i = \frac{\xi_1}{2\tau\xi_0} = \frac{M_2\xi_0 - M_3}{2\xi_0 + M_1}\frac{1}{2\tau\xi_0}, \tag{15.8}$$

которые в частном случае слабо сцементированных сред переходят в выражения (13.9), (13.11). Здесь величина ξ_0 — соответствующее значение одного из двух корней уравнения (15.2).

Сжимаемость сухой пористой среды не может быть меньше сжимаемости сплошного материала твердой среды. Отсюда справедлива оценка

$$0 \leqslant \beta_1 K \leqslant \frac{1}{1 - m_0}, \tag{15.9}$$

поскольку в смеси, где твердые частицы не образуют связного скелета (в разбавленных суспензиях — см. § 8), имеем $\beta_1 K = 0$, а в «идеально сцементированной» пористой среде: $\beta_1 K (1 - m_0) = 1$ [168].

Для перехода от идеально сцементированной пористой среды к среде с *абсолютно жестким скелетом* нужно устремить $B \to 0$, $\beta_1 \to 0$, сохраняя равенство $(1 - m_0)\beta_1 K = 1$. Тогда из уравнения (15.7) следует, что вторая волна распространяется с бесконечно большой скоростью, а первая со скоростью $v_\infty = 1/\sqrt{\rho_2 \beta_2}$, тогда как коэффициент затухания второй волны будет

$$b_b = \frac{\rho m_0 (1 - m_0)}{2\rho_2 \tau} = \frac{m\mu}{2\rho_2 k_0} = b_*. \tag{15.10}$$

Рассмотрим *газонасыщенную* среду

$$\rho_1 \gg \frac{(1 - m_0)(1 - \beta_1 K)}{m_0 (1 - m_0)} \rho_2, \quad \beta_2 \gg \beta_1, \quad \beta \approx m_0 \beta_2.$$

Тогда из уравнения (15.7) следует

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 B}}, \quad v_\infty = \frac{1}{\sqrt{\rho_2 \beta_2}}. \tag{15.11}$$

Если, кроме того, $m\beta_2 \gg B$, $\rho_2 \beta_2 \gg \rho B$, — среда сцементирована, волна переупаковки распространяется гораздо быстрее «воздушной» волны, — то имеем

$$M_1 \approx \frac{\rho_2 \beta_2}{\rho_1 B}, \quad M_2 \approx \frac{m_0 (1 - m_0)\beta}{B}$$

и из формулы (15.8) получаем

$$b_a \approx 0, \quad b_b = \frac{m_0 (1 - m_0)\rho}{2\rho_2 \tau} = \frac{m\mu}{2\rho_2 k_0} = b_*. \tag{15.12}$$

Таким образом, в такой сцементированной газонасыщенной среде сначала распространяется волна второго рода, практически без затухания, определяемого перетоками жидкости, а вслед за ней распространяется, как и в абсолютно жесткой пористой среде (см. § 10), волна по газу.

Пусть $\rho_1 = 2{,}65$ *г/см*^{3}, $m_0 = 0{,}3$; $\beta_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ *ат*$^{-1}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}25$. Положим $K\beta_1 = 0{,}1 \div 0{,}4$. Так как $KB = (1 + \nu)/3\,(1 - \nu)$, то отсюда $B = (2{,}8 \div 0{,}8)\,10^{-5}$ *ат*$^{-1}$. Далее $\beta_2 \approx p^{-1}$, где p — начальное давление в пласте. Поэтому при $p \approx 10^2$ *ат* $\varepsilon = m\beta_2/B \approx 3 \cdot 10^2$, а для меньших значений p параметр ε еще больше. Если газ идеальный, то $\rho_2 = \rho_2^0 p/p_0$, где $\rho_2^0 = \rho_2\,(p_0)$. Поэтому $\rho_2\beta_2/(\rho B) = \rho_2^0/(\rho p_0 B)$. Если $p_0 = 1$ *ат*, $\rho_2 = 0{,}8 \times 10^{-3}$ *г/см*^{3} (метан), то $\rho_2\beta_2/(\rho B) \approx 25 \div 30$. Таким образом, выполняются условия $(m\beta_2/B) \gg 1$ и $(\rho_2\beta_2)/(\rho B) \gg 1$.

Оценим теперь условия выполнения неравенства $\rho_1 \geqslant 10\, n\rho_2/m\,(1 - m)$, $n = (1 - m_0)(1 - \beta_1 K)$. При $K\beta_1 = 0{,}1$ имеем $n = 0{,}63$; при $K\beta_1 = 0{,}4$ соответственно $n = 0{,}42$. При выбранных значениях параметров имеем $\rho_2 \leqslant 1{,}4 \cdot 10^{-1}$ *г/см*^{3} для $K\beta_1 = 0{,}1$ и $\rho_2 \leqslant 2{,}8 \cdot 10^{-1}$ *г/см*^{3} для $K\beta_1 = 0{,}4$. При больших значениях $K\beta_1$ допустима величина ρ_2 еще больше. Для метана при $K\beta_1 = 0{,}1$ допустимой величине ρ_2 соответствует $p = 140$ *ат*, а при $K\beta_1 = 0{,}4$ — давление $p \approx 300$ *ат*.

С ростом $K\beta_1$ (сцементированности пласта) и при уменьшении начального давления точность этих формул возрастает.

Для идеально сцементированной пористой среды, насыщенной жидкостью (водой), скорости распространения скачков также близки к скоростям, определяемым выражениями (15.11). Действительно, условию $\beta_1 K(1-m_0)=1$ соответствует $n=-m$, $\beta=m(\beta_2-\beta_1)$ и из уравнений (15.7) получаем

$$v^2=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\rho_1 B}+\frac{\rho_0 m}{(1-m)\rho_1\rho_2\beta}\right)\pm\left(\frac{1}{\rho_1 B}-\frac{\rho_0 m}{(1-m)\rho_1\rho_2\beta}\right)\sqrt{1+z}\right\}, \tag{15.13}$$

$$z=\frac{4m^2\rho_2}{(1-m)\rho_1^2 B\rho_2\beta\left(\frac{1}{\rho_1 B}-\frac{\rho_0 m}{(1-m)\rho_1\rho_2\beta}\right)^2}.$$

Пусть $\rho_1=2{,}65\ г/см^3$ (кварц), $\rho_2=1\ г/см^3$ (вода), $\beta_1=0{,}5\cdot10^{-5}\ am^{-1}$, $\beta_2=3\cdot10^{-5}\ am^{-1}$, $m=0{,}3$, $\nu=0{,}25$. Так как $K\beta_1=1/(1-m)$, $KB=(1+\nu)/3(1-\nu)$, то $B=(1+\nu)(1-m)\beta/3(1-\nu)$. Используя выбранные значения параметров, получим оценку $z\approx 0{,}06$. Отсюда

$$v_b\approx\frac{1}{\sqrt{\rho_1 B}};\quad v_a\approx\sqrt{\frac{\rho_0}{(1-m_0)\rho_1}}\frac{1}{\sqrt{\rho_2(\beta_2-\beta_1)}}. \tag{15.14}$$

Для воды $\beta_2\approx 10$, т. е. $\beta_2-\beta_1\approx\beta_2$. При указанном выборе параметров $\sqrt{\rho_0/(1-m_0)\rho_1}\approx 1{,}07$. При $m=0{,}2$ имеем $\sqrt{\rho_0/(1-m_0)\rho_1}\approx 1{,}05$. Отсюда для идеально сцементированной пористой среды, насыщенной водой, $v_a=\sqrt{\rho_2\beta_2}$ (с точностью порядка 10%).

Перейдем теперь к нахождению *величин скачков давления и напряжения* в газонасыщенных средах. Для этого нужно рассмотреть, например, одномерную, плоскую задачу о слабом динамическом сжатии среды.

Применим к исходной системе (13.1)—(13.3) преобразование Лапласа и учтем начальные условия покоя. Тогда получим [79] следующую систему уравнений, где P, V — трансформанты Лапласа от p, σ соответственно:

$$s\left(s+(n+m)r\frac{1}{\tau}\right)V=c^2r\frac{d^2P}{dx^2}-\varepsilon s\left(fs+qr\frac{1}{\tau}\right)P,$$

$$c^4r\frac{d^4P}{dx^4}-c^2r\left\{(r+\varepsilon f)s+(r(n+m)+\varepsilon qr)\frac{1}{\tau}\right\}\frac{d^2P}{dx^2}+$$

$$+\varepsilon s^3\left\{(f-h)s+(q(r-1)+(n+m)(f-hr))\frac{1}{\tau}\right\}P=0. \tag{15.15}$$

Предположим, что $\rho_1 \gg \rho_2$, $\beta_2 \gg \beta_1$, $\chi \approx m\beta_2/B \gg 1$. Тогда коэффициенты в уравнениях (15.15) упростятся:

$$\rho \approx \rho_1, \quad h \approx (1-m)\frac{\rho_2}{m\rho_1}, \quad c^2 = \frac{1}{\rho B}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{b_0}{m^2(1-m)\rho_1},$$

$$j = \frac{1-m}{n}, \quad q = 1-m, \quad r = \frac{m(1-m)\rho_1}{n\rho_2}. \tag{15.16}$$

Воспользовавшись этим, а также пренебрегая единицей по сравнению с χ, сведем второе уравнение системы (15.15) к следующему:

$$\frac{d^4P}{dx^4} - s\left\{\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v_\infty^2}\right)s + \frac{2b_*}{v_\infty^2}\right\}\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{s^3}{c^2v_\infty^2}(s+2b_*)P = 0, \tag{15.17}$$

здесь c и v_∞ — скорости, определяемые выражениями (15.11), а b_* — коэффициент затухания (15.12).

Уравнению (15.17) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - s\left[\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v_\infty^2}\right)s + \frac{2b_*}{v_\infty^2}\right]\lambda^2 + \frac{s^3}{c^2v_\infty^2}(s+2b_*) = 0, \tag{15.18}$$

решения которого

$$\lambda_1^2 = \frac{s}{c^2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{s(s+2b_*)}{v_*^2}. \tag{15.19}$$

Ограниченное на бесконечности решение для P имеет вид

$$P(x, s) = A_1e^{-\lambda_1 x} + A_2e^{-\lambda_2 x}. \tag{15.20}$$

Рассмотрим приложение нагрузки со стороны *жидкого поршня*. Согласно первому уравнению (15.15), а также соотношению (15.16) соответствующее граничное условие (см. § 13) принимает вид

$$v_\infty^2\left(\frac{d^2P}{dx^2}\right)_{x=0} - s(s+2b_*)P(0,s) = 0. \tag{15.21}$$

Отсюда в рассматриваемом приближении имеем

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{p_*}{s} \tag{15.22}$$

и соответственно для жидкого поршня оказывается справедливым решение

$$P(x, s) \approx \frac{p_*}{s}\exp\left(-\frac{x}{v_\infty}\sqrt{s(s+2b_*)}\right). \tag{15.23}$$

Воспользовавшись результатами, полученными в книге [86], найдем оригинал функции давления

$$p(x, t) \approx \begin{cases} p_*\left(e^{-\frac{b_*x}{v_\infty} + \frac{xb_*}{v_\infty}}\int\limits_{x/v_\infty}^{t} e^{-b_*\tau}\frac{I_1\left(b_*\sqrt{\tau^2 - x^2/v_\infty^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - x^2/v_\infty^2}}d\tau\right), \\ \qquad\qquad t > x/v_\infty \\ 0, \quad t < x/v_\infty. \end{cases} \tag{15.24}$$

Выражение (15.24) совпадает с формулой для распространения скачка давления при соответствующем воздействии на пористую среду с абсолютно жестким скелетом.

При приложении нагрузки со стороны *проницаемого поршня* с учетом граничных условий § 13, первого уравнения (15.15) и условий (15.16) найдем

$$P(x, s) = A_1 (e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}),$$
$$v_\infty^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A_1 = \frac{1}{\chi} \frac{n}{1-m} s \left(s + (n+m) \frac{r}{\tau} \right) \frac{\sigma_1}{s}. \tag{15.25}$$

Далее

$$v_\infty^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = -s \left[s \left(1 - \frac{\rho_1 B}{\rho_2 \beta_2} \right) + 2b_* \right] \approx -s (s + 2b_*),$$

так как $\rho_1 B \ll \rho_2 \beta_2$. Поэтому получим

$$A_1 = -\frac{1}{\chi} \frac{n}{1-m} \frac{s + (n+m) \frac{r}{\tau}}{s + 2b_*} \frac{\sigma_*}{s}. \tag{15.26}$$

Учитывая условие $\chi = m\beta_2/B \gg 1$, приближенно запишем

$$A_1 \approx 0, \quad P(x, s) \approx 0, \quad V(x, s) \approx \frac{\sigma_*}{s} \exp\left(-\frac{sx}{c} \right), \tag{15.27}$$

что соответствует

$$p(x, t) \approx 0, \quad \sigma(x, t) \approx \begin{cases} \sigma_* & \text{при} \quad t > x/c \\ 0 & \text{при} \quad t < x/c \end{cases} \tag{15.28}$$

Таким образом, при приложении нагрузки со стороны *жидкости* насыщенная газом пористая среда ведет себя подобно пористой среде с абсолютно жестким скелетом. При воздействии типа «проницаемого поршня» практически вся нагрузка воспринимается скелетом, а давление в жидкости почти не изменяется; приложенная к границе нагрузка σ_* распространяется по скелету в виде незатухающего скачка со скоростью $c = 1/\sqrt{\rho_1 B}$.

Согласно результату (15.14) идеально сцементированная насыщенная жидкостью пористая среда при слабых динамических воздействиях ведет себя примерно так же, как и пористая среда, насыщенная газом.

При учете *температурных эффектов* уравнения распространения волн в насыщенной газом пористой среде с абсолютно жестким скелетом запишутся (см. § 9) в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - v_T^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2b_* \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} 2b_* \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha_2 T_0}{c_2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\tau_2} T, \tag{15.29}$$

здесь α_2, β_2 — коэффициенты объемного расширения и изотермической сжимаемости газа соответственно; c_2 — теплоемкость газа на единицу объема при постоянном давлении; T — отклонение температуры газа от начальной T_0; $\tau_2 = mc_2/\varkappa$ ($\varkappa$ — коэффициент тепло-

обмена между газом и скелетом); $v_T = 1/\sqrt{\rho_2^0 \beta_2}$ — изотермическая скорость звука газа.

Выше было показано, что в такой среде скорость v_∞ распространения волн давления при больших частотах равна адиабатической скорости звука в газе

$$v_\infty = \sqrt{\gamma_2}/\sqrt{\rho_2^0 \beta_2}, \tag{15.30}$$

где γ_2 — показатель адиабаты газа.

Для коэффициента затухания таких волн при $\omega \to \infty$ справедлива формула

$$b_a = b_* + \frac{\gamma_2 - 1}{2\tau_2}. \tag{15.31}$$

Отсюда при динамическом действии воздушной волны на насыщенную газом пористую среду цементации $K\beta_1 \geqslant 1$ скорость распространения волны давления будет определяться уравнением (15.30), а коэффициент затухания фронта волны — выражением (15.31). Скорость распространения волны напряжения в скелете остается без изменений $c \approx 1/\sqrt{\rho_1 B}$.

Предположим теперь, что насыщенная газом пористая среда соприкасается: а) со свободной газовой средой; б) с однофазной упругой средой — и со стороны указанных сред на границу раздела нормально к ней падает периодическая волна. В свете изложенного выше ясно, что в случае «а» проходящая в газонасыщенную пористую среду волна будет быстрозатухающей волной второго рода (газонасыщенная среда работает как акустический поглотитель), а в случае «б» — волной первого рода. (Строго говоря, вторая прошедшая волна тоже будет, но с очень малой амплитудой.)

Результаты, излагаемые в данном параграфе, были получены П. П. Золотаревым [78].

§ 16. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ГРАНИЦАМИ В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим сначала общую задачу об отражении волн от пористого насыщенного слоя без учета температурных эффектов. Прежде всего уравнения движения (5.I), (5.II), можно записать для перемещения $\vec{l}^{(1)}$ твердой фазы и для смещения $\vec{l}^{(2)}$ жидкости относительно скелета среды

$$\rho_1 (1 - m_0) \frac{\partial^2 \vec{l}^{(1)}}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{l}^{(1)} - \vec{l}^{(2)}) = (1 - m_0)(\lambda_1 + 2\lambda_2) \nabla^2 \vec{l}^{(1)} + Q \nabla^2 \vec{l}^{(2)}, \tag{16.1}$$

$$\rho_2 m_0 \frac{\partial^2 \vec{l}^{(2)}}{\partial t^2} - b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{l}^{(1)} - \vec{l}^{(2)}) = Q \nabla^2 \vec{l}^{(1)} + R \nabla^2 \vec{l}^{(2)}, \tag{16.2}$$

где использованы обозначения Био — см. табл. 2.

Для исследования гармонических волн смещения твердой и жидкой фаз можно представить в виде $\vec{l}^{(1)} = (\operatorname{grad}\varphi_1 + \operatorname{rot}\vec{\psi}_1)\,e^{-\omega i t}$; $\vec{l}^{(1)} = (\operatorname{grad}\varphi_2 + \operatorname{rot}\vec{\psi}_2)\,e^{-i\omega t}$, где φ_i, $\vec{\psi}_i$ — функции только координат. Тогда система (16.1)—(16.2) сводится к следующим двум системам:

относительно объемных потенциалов φ_1, φ_2

$$\begin{gathered}\rho_1(1-m_0)\,\omega^2\varphi_1 + ib\omega\,(\varphi_1-\varphi_2) + \\ +(1-m_0)\,(\lambda_1+2\lambda_2)\,\nabla^2\varphi_1 + Q\,\nabla^2\varphi_2 = 0. \\ \rho_2 m_0\omega^2\varphi_2 - ib\omega\,(\varphi_1-\varphi_2) + Q\,\nabla^2\varphi_1 + R\,\nabla^2\varphi_2 = 0\end{gathered} \tag{16.3}$$

и относительно векторных потенциалов $\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$

$$\begin{gathered}\rho_1(1-m_0)\,\omega^2\vec{\psi}_1 + ib\omega\,(\vec{\psi}_1-\vec{\psi}_2) = (1-m_0)\,\lambda_2\,\nabla^2\vec{\psi}_1, \\ \rho_2 m_0\omega^2\vec{\psi}_2 - ib\omega\,(\vec{\psi}_1-\vec{\psi}_2) = 0.\end{gathered} \tag{16.4}$$

Уравнения (16.4) можно записать в следующем виде [106, 275]:

$$\nabla^2\vec{\psi}_2 + \omega k_s^2\vec{\psi}_2 = 0, \tag{16.5}$$

$$\vec{\psi}_1 = -\nu\vec{\psi}_2, \tag{16.6}$$

$$\nu = -\left(1+\frac{\rho_2 m_0\omega}{ib}\right) = -1+i\omega\,\frac{\rho_2 a_0}{\mu m_0\,(1-m_0)} = -1+i\omega\tau\,\frac{\rho_0}{\rho_1(1-m_0)},$$

$$k_s^2 = \frac{\rho_1(1-m_0)\,\omega^2\nu + ib\omega\,(1+\nu)}{(1-m_0)\,\mu\nu}.$$

Система уравнений (16.3) преобразуется к уравнениям типа (16.5) несколько более сложным образом [275]. Введем функции χ_a и χ_b

$$\varphi_1 = \chi_a + \chi_b, \quad \varphi_2 = M_a\chi_a + M_b\chi_b. \tag{16.7}$$

Тогда уравнения (16.3) примут вид

$$\left(\frac{1+m_0}{B}+QM_a\right)\left(\nabla^2\chi_a + \frac{\rho_1(1-m_0)+ib\,(1-M_a)\,\omega^{-1}}{(1-m_0)\,B^{-1}+QM_a}\,\omega^2\chi_a\right) +$$

$$+\left(\frac{1-m_0}{B}+QM_b\right)\left(\nabla^2\chi_b + \frac{\rho_1(1-m_0)+ib\,(1-M_b)\,\omega^{-1}}{(1-m_0)\,B^{-1}+QM_b}\,\omega^2\chi_b\right) = 0, \tag{16.8}$$

$$(Q+RM_a)\left(\nabla^2\chi_a + \frac{\rho_2 m_0 M_a - ib\,(1-M_a)\,\omega^{-1}}{Q+RM_a}\,\omega^2\chi_a\right) +$$

$$+(Q+RM_b)\left(\nabla^2\chi_b + \frac{\rho^2 m_0 M_b - ib\,(1-M_b)\,\omega^{-1}}{Q+RM_b}\,\omega^2\chi_b\right) = 0. \tag{16.9}$$

Если теперь выбрать числа M_a, M_b так, что

$$\frac{\rho_1(1-m_0)+ib\,(1-M_a)\,\omega^{-1}}{(1-m_0)\,B^{-1}+QM_a} = \frac{\rho_2 m_0 M_a - ib\,(1-M_a)\,\omega^{-1}}{Q+RM_a} = k_a^2, \tag{16.10}$$

$$\frac{\rho_1(1-m_0)+ib\,(1-M_b)\,\omega^{-1}}{(1-m_0)\,B^{-1}+QM_b} = \frac{\rho_2 m_0 M_b - ib\,(1-M_b)\,\omega^{-1}}{Q+RM_b} = k_b^2, \tag{16.11}$$

то система (16.8)—(16.9) имеет в силу линейной независимости уравнений (16.8) и (16.9) тривиальное решение

$$\nabla^2\chi_a + \omega^2 k_a^2 \chi_a = 0, \tag{16.12}$$

$$\nabla^2\chi_b + \omega^2 k_b^2 \chi_b = 0, \tag{16.13}$$

т. е. система (16.3) сведена к разделяющейся системе уравнений (16.12), (16.13).

Согласно уравнениям (16.10)—(16.11) коэффициенты k_a, k_b являются корнями следующего биквадратного уравнения:

$$Ck^4 - bk^2 + a = 0, \tag{16.14}$$

$$C = \frac{1}{\nu}\left\{\frac{-(1-m_0)\,R}{B\,(\rho_1(1-m_0)+ib\omega^{-1})\,ib\omega^{-1}} + \frac{Q}{(\rho_1(1-m_0)+ib\omega^{-1})\,ib\omega^{-1}}\right\},$$

$$b = \frac{1-m_0}{B}\,\frac{1}{\rho_1(1-m_0)+ib\omega^{-1}} + \frac{1}{\nu}\left(-\frac{R}{ib\omega^{-1}} - \frac{2Q}{\rho_1(1-m_0)+ib\omega^{-1}}\right),$$

$$a = 1 - \frac{\rho_0^2}{\rho_2 m_0 + ib\omega^{-1}}.$$

Константы M_a, M_b связаны с корнями k_a, k_b следующим выражением:

$$M_{a,\,b} = \frac{1-(1-m_0)\,B^{-1}\,(\rho_1(1-m_0)+ib\omega^{-1})^{-1}\,k_{a,\,b}^2}{Q\,(\rho_1(1-m_0)+ib\omega^{-1})^2\,k_{a,\,b}^2 + ib\omega^{-1}}. \tag{16.15}$$

Прежде всего корни k_a, k_b, как можно показать, определяют соответственно рассмотренные выше волны I и II рода. Для изучения закономерностей отражения от границ раздела ограничимся плоскими, падающими по нормали к поверхности раздела волнами $\chi_n = A_n \exp(\pm i\omega k_n x)$, $n = a,\ b$.

Пусть плоскость $x = 0$ разделяет две среды с различными свойствами. Будем обозначать характеристики волн в среде $x < 0$ индексом « — », а характеристики в среде $x > 0$ индексом « + ». На границе $x = 0$ должны выполняться следующие условия, связывающие характеристики волн χ^-, χ^+:

а) непрерывности смещений частиц скелета

$$\frac{d}{dx}(\chi_a^- + \chi_b^-) = \frac{d}{dx}(\chi_a^+ + \chi_b^+); \tag{16.16}$$

б) сохранение массы жидких частиц

$$m_0^- \frac{d}{dx}(M_a^-\chi_a^- + M_b^-\chi_b^-) = m_0^+ \frac{d}{dx}(M_a^-\chi_a^- + M_b^+\chi_b^+), \tag{16.17}$$

в) непрерывности давления в жидкости (здесь возмущения давления выражены через смещения)

$$(Q + RM_a)^-\,(k_a^-)^2\,\chi_a^- + (Q + RM_b)^-\,(k_b^-)^2\,\chi_b^- =$$
$$= (Q + RM_a)^+\,(k_a^+)^2\,\chi_a^+ + (Q + RM_a)^+\,(k_b^+)^2\,\chi_b; \tag{16.18}$$

г) непрерывность суммарных напряжений

$$\left(\frac{1-m_0}{B}+Q+(Q+R)M_a\right)^{-}(k_a^{-})^2\chi_a^{-}+$$
$$+\left(\frac{1-m_0}{B}+Q+(Q+R)M_b\right)^{-}(k_b^{-})^2\chi_b^{-}=$$
$$=\left(\frac{1-m_0}{B}+Q+(Q+R)M_a\right)^{+}(k_b^{+})^2\chi_a^{+}+$$
$$+\left(\frac{1-m_0}{B}+Q+(Q+R)M_b\right)^{+}(k_b^{+})^2\chi_b^{+}. \qquad (16.19)$$

Соотношения (16.16)—(16.19) позволяют исследовать самые общие случаи отражения плоских волн, падающих по нормали к поверхности раздела. Например, пусть из насыщенной пористой среды на границу раздела падает волна I рода $\mathbf{e}^{i\omega k_a^{-}x}$. Это типичный случай при значительном удалении источника от поверхности раздела, поскольку волны II-рода затухают исключительно быстро (см. § 7, 14). При этом смещения представляются в виде

$$\chi_a^{-}=\mathbf{e}^{i\omega k_a^{-}x}+A_a^{-}\mathbf{e}^{-i\omega k_a^{-}x},$$
$$\chi_a^{+}=A_a^{+}\mathbf{e}^{i\omega k_a^{+}x}, \qquad (16.20)$$
$$\chi_b^{-}=A_b^{-}\mathbf{e}^{-i\omega k_b^{-}x}, \quad \chi_b^{+}=A_b^{+}\mathbf{e}^{i\omega k_b^{+}x}.$$

Напомним, что числа k_a, k_b известны по свойствам среды и частоте колебаний, их действительная часть равна скорости распространения волны, а мнимая — коэффициенту затухания. Задача при этом сводится к нахождению величин амплитуд A_a^{-}, A_a^{+}, A_b^{-}, A_b^{+} из системы алгебраических уравнений (16.16)—(16.19).

Геертсма и Смит рассмотрели случай отражения волны от поверхности раздела между непроницаемой твердой породой и насыщенной жидкостью пористой средой [293]. Они вычислили коэффициент поглощения по энергии (отношение энергии прошедших волн в среду «+» к полной падающей энергии, т. е. квадратов амплитуд смещений), причем при этом на поверхности раздела волна II-рода не возникает. Второй рассмотренный ими случай — падение волны из жидкости на пористую среду, насыщенную той же жидкостью, и в частности при абсолютно жестком скелете среды, когда по среде «+» распространяется только волна давления (см. также § 15). В общем случае часть энергии падающей волны уходит на возбуждение у поверхности раздела быстрозатухающей волны II рода. Эти результаты согласуются с полученными выше выводами о зависимости типа возникающих волн от способа приложения нагрузки.

В. П. Степанов рассмотрел важный случай волн низких (сейсмических) частот: $\omega\tau \ll 1$ (см. табл. 7), проходящих через контакт двух жидкостей, находящихся в одной и той же пористой среде, а также случай двух пористых насыщенных сред, разделенных непроницаемой границей [204]. Им были получены следующие выра-

жения для амплитуд смещений, справедливые для границ обоих типов:

$$A_a^- = \frac{(\rho_0 v_a)^+ - (\rho_0 v_a)^-}{(\rho_0 v_a)^+ + (\rho_0 v_a)^-}, \quad A_a^+ = 2\frac{v_a^+}{v_a^-}\frac{(\rho_0 v_a)^-}{(\rho_0 v_a)^+ + (\rho_0 v_a)^-}, \quad (16.21)-(16.22)$$

причем амплитуды волн II рода оказались пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Эти формулы совпадают с известными формулами для однофазных сред, но вместо обычных скоростей звука здесь используются скорости распространения волн I рода. Выражения (16.21), (16.22) применялись для оценок возможностей метода прямых поисков нефти [152][1].

Л. Я. Косачевский предпринял попытку анализа общей задачи о прохождении волн (при произвольном угле падения) через пачку слоев различных сред и более подробно рассмотрел важную для акустики задачу о прохождении волн через пористый слой, разделяющий на две части заполненное жидкостью пространство [107].

Дересевич рассмотрел задачу о выходе волны I рода на свободную от нагрузки поверхность насыщенной нулевой вязкостью пористой среды [275]. Им было показано, что угол падения волны I рода равен углу ее отражения, тогда как возникшие волны (волна поперечного сдвига и продольная волна II рода) связаны с углом падения волны I рода такими же соотношениями, как и чисто упругие волны. Автор выписывает формулу для отношений амплитуд отраженных и падающей волн, причем отмечает, что только при нормальном падении волны I рода не возникает отраженных поперечной и объемной волн II рода. При этом знак амплитуды смещения становится противоположным.

Дересевичем отмечается наличие угла падения, при котором отражаются только объемная волна II рода и поперечная.

Аналогично исследуется менее интересный случай падения волны II рода, а также падение волны поперечного сдвига. Снова при этом могут порождаться волны других типов. Отмечается, что при угле падения в 45° амплитуда падающей поперечной волны равна и по величине и по знаку амплитуде единственной отраженной поперечной волны. При нормальном падении поперечной волны на границе также не возникают волны иных типов; при этом амплитуда отражений поперечной волны равна по величине, но противоположна по знаку амплитуде волны падения.

Как было показано в § 15, для анализа отражения волн от поверхности раздела газонасыщенной породы и породы, насыщенной жидкостью, важен случай волны II рода. Соответствующее рассмотрение было недавно опубликовано [2].

---

[1] См. также Л. А. Сергеев, О. Л. Кузнецов. О различии акустических свойств газо-водонасыщенных коллекторов. В сб. «Термические методы увеличения нефтеотдачи». М., ВНИИОЭНГ, 1967.

[2] П. П. Золотарев, В. П. Степанов. Отражение продольных упругих волн второго рода от границы раздела между насыщенной газом и насыщенной жидкостью пористыми средами. НТС по добыче нефти, № 32, М., изд-во «Недра», 1968.

В работе Джонса [301] было предпринято исследование *поверхностных волн Релея* в упругом пористом насыщенном полупространстве. При этом вводятся, как обычно, скалярные и векторные потенциалы смещений фаз и предполагается, что они имеют вид $\varphi_l = A_l e^{-sz} e^{i(kx-\omega t)}$, $\vec{\psi}_l = B_l e^{-rz} e^{i(kx-\omega t)}$, где ось z направлена в глубину среды. Подстановка этих выражений в уравнения движения и требования нетривиальности решения (т. е. коэффициенты A_l, B_l не равны тождественно нулю) позволяют выразить коэффициенты затухания по глубине s, r через волновое число и параметры среды. Дальнейшая подстановка решения в граничные условия (отсутствие возмущений напряжений в скелете среды и давления в жидкости) приводит к искомому дисперсионному уравнению. Это уравнение весьма сложно, поэтому Джонс ограничивается следующим замечанием: исследуемое движение будет поверхностной волной, если коэффициенты r, s — действительные, положительные числа. Это возможно при нулевом коэффициенте вязкости, т. е. при $\tau\omega \to 0$. В связи со сложностью общего дисперсионного уравнения Джонс ограничивается далее рассмотрением этого случая, когда дисперсионное уравнение сводится к алгебраическому уравнению шестого порядка и показывает наличие по крайней мере одного корня, соответствующего двум возможным поверхностным волнам Релея. В сплошной однофазной упругой среде, как известно, такая поверхностная волна одна — наличие двух волн связано с существованием деформации двух типов, переупаковки и изменения плотности фаз. Частный случай волны Релея в отсутствии эффекта сжимаемости фаз рассматривался Э. А. Бондаревым [26].

Задачу о распространении *волн Лява* в пористом насыщенном слое, расположенном на упругом полубесконечном основании, рассмотрел Дересевич [276]. Пусть ось z направлена по вертикали так, что плоскость $z = 0$ является границей раздела слоя и упругого полупространства и плоскость $z = h$ — свободная от напряжения вторая граница слоя. Исследуются гармонические волны, характеризуемые обращением в нуль смещений обеих фаз вдоль осей x, z зависимостью смещений вдоль оси y от координат x, z и времени. Уравнения движения пористого слоя сводятся при этом к уравнению (16.5), которое может быть записано [1] относительно $l_0(x, z)$, где $l_y = l_0 \exp(i\omega t)$ — смещение твердой фазы:

$$(\nabla^2 + k_s^2\omega^2)\, l_0 = 0, \tag{16.23}$$

$$k_S^2\omega^2 = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad \alpha_1 = R(\omega)\,\omega^2/v_s^2, \quad \alpha_2 = S(\omega)\,\omega^2/v_s^2,$$

[1] В работе Дересевича используется модификация закона Дарси, позволяющая учитывать нарушения пуазейлевского течения в порах (см. § 11).

$$v_s^2 = \frac{(1-m_0)\lambda_2}{\rho_0}, \qquad R(\omega) = \frac{(\tau\omega)^2 \dfrac{\rho_0}{\rho_1(1-m_0)} + 1}{\left[\omega \dfrac{\rho_0}{\rho_1(1-m_0)}\right]^2 + 1},$$

$$S(\omega) = \frac{\tau\omega \dfrac{\rho_2 m_0}{\rho_1(1-m_0)}}{\left[\tau\omega \dfrac{\rho_0}{\rho_1(1-m_0)}\right]^2 + 1}.$$

Решение уравнения (16.23) выбирается типа $l_0 = f(z) \exp(-i\gamma x)$, которому соответствует следующее выражение для смещения:

$$l_y = (A_1 \cos a_1 z + A_2 \sin a_1 z)\, e^{i(\omega t - \gamma x)},$$

где $a_1^2 = k_s^2\omega^2 - \gamma^2$. Уравнение движения упругого основания записывается в виде

$$(\nabla^2 + k_e^2\omega^2) l_e = 0, \quad k_e = \frac{\rho_e}{\lambda_e} \tag{16.24}$$

относительно его смещения l_e. Здесь λ_e — модуль сдвига; ρ_e — плотность упругого основания.

Решение уравнения (16.24), соответствующее волнам Лява, берется в виде: $l_e = A_3 \exp(a_2 z) \cdot \exp(i\omega t - i\gamma x)$, $a_1^2 = k_e^2\omega^2 - \gamma^2$. Для определения констант A_i имеют место три условия: отсутствие напряжений на свободной поверхности, непрерывность напряжений и смещений на поверхности раздела в плоскости $z = 0$

$$A_1 \sin a_1 h - A_2 \cos a_1 h = 0, \quad \lambda_2(1-m_0) a_1 A_1 - \lambda_e a_2 A_3 = 0, \quad A_1 = A_3,$$

что приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\operatorname{tg} a_1 h = \lambda_e a_2 (1-m_0)^{-1} \lambda_2^{-1} \tag{16.25}$$

относительно волнового числа γ, где $\gamma^2 = \zeta_1 - i\zeta_2$; $\zeta_1 > 0$, $\zeta_2 \geqslant 0$. Это соотношение совпадает с классическим частотным уравнением для волн Лява, но в него входят комплексные числа $a_1 = b_1 - ic_1$, $a_2 = b_2 - ic_2$, т. е. классический случай характеризуется условием $\alpha_2 = 0$ — в пористом слое нет затухания из-за фильтрационных сил. В связи с этим оценим отношение α_2/α_1. Оказывается, что при всех изменениях частот

$$\max \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\rho_2 m_0}{(\sqrt{\rho_0} + \sqrt{\rho_1(1-m_0)^2}} \ll 1, \tag{16.26}$$

т. е. $\alpha_2 \ll \alpha_1$, и соответственно можно предположить, что $\zeta_2 \ll \zeta_1$. В связи с этим окончательное решение трансцендентного уравнения ищется при помощи разложений в ряды по величинам

$$\xi_1 = \frac{\alpha_2 - \zeta_2}{\alpha_1 - \zeta_1}, \quad \xi_2 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1 - (\omega^2\rho_e/\lambda_e)}. \tag{16.27}$$

Определенный интерес представляет задача о *распространении волн в пористом насыщенном жидкостью круговом цилиндре*

(Гарднер [290]), Уилли, Грегори и Гарднер [327]), боковая поверхность которого свободна от напряжений. Решение этой задачи имеется в смещениях, например: $l_r = l_r^0 \exp(i\gamma z + i\omega t)$, $l_z = l_z^0 \exp(i\gamma z + i\omega t)$, где l_r, l_z — компоненты смещения твердой фазы по радиусу по оси z цилиндра. Функции l_r^0, l_z^0 выражаются через функции Бесселя $J_0(h_i r)$, $i = 1,2$, $J_1(h_3 r)$, где h_1, h_2 и h_3 — константы, определяемые волновым числом и скоростями распространения соответственно продольных волн I и II рода и поперечных волн. При этом условия обращения в нуль нормальной и касательной нагрузок, а также порового давления, приложенных к боковой поверхности цилиндра, определяют дисперсионное уравнение, которое при незначительном влиянии жидкости в поровом пространстве сводится к известному частотному уравнению Похгаммера [101]. Полное дисперсионное уравнение весьма сложно, в связи с чем подробно исследуются частные случаи: низкочастотные и высокочастотные волны в тонких стержнях.

Отмечается наличие волн двух типов. Для низких частот выписываются выражения для скоростей распространения этих волн, а также исследуется в зависимости от параметра $r_0 = [\omega b H/(RP - Q^2)]^{1/2}$ декремент затухания волн первого рода, причем отмечается, что при малых и больших значениях этого параметра декремент затухания обращается в нуль и достигает максимума, когда длина волны расширения второго рода примерно равна половине длины окружности цилиндра. Для относительно высоких частот (вернее для обычных частот в высокопроницаемой среде) учитывается возможность нарушения пуазейлевского течения в порах (см. § 11). Однако указанный параметр в некотором диапазоне частот также оказывается малым, хотя мала и величина отношения r_0/Λ (где Λ — длина волны). При этом выписывается выражение для скорости распространения волны, переходящее при отсутствии жидкости в формулу Релея [101].

§ 17. СТРУКТУРА СИЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В МЯГКИХ НАСЫЩЕННЫХ СРЕДАХ

Ударные волны в пористых насыщенных жидкостью средах, как в гетерогенной среде, исследовались Г. М. Ляховым [133—135], который воспользовался, как уже указывалось в § 8, предположением о равенстве фазовых скоростей и напряжений [133], т. е. он считал среду фактически однородной (но с особым уравнением состояния), а фронт ударной волны при этом представлял в виде простого разрыва. В то же время более строгий и общий подход к механике гетерогенных сред требует введения модели с различными напряжениями и скоростями.

Изложенное выше исследование в акустическом приближении динамических процессов в мягких двухфазных средах показывает, что более быстрая волна характеризуется равенством давлений в фазах. Эта *волна давления* является наблюдаемой волной в насы-

щенных капельной жидкостью пористых средах и распространяется как в однофазной среде с одним неравновесным (релаксирующим) параметром. Ударные волны в релаксирующих средах характеризуются весьма размытой структурой — тонкий ударный переход, определенный обычной вязкостью и теплопроводностью, заменяется на относительно широкий релаксационный слой. Отсюда учет реальной двухфазности позволит исследовать структуру фронта ударной волны в насыщенных пористых средах.

Примем предположение, что ударный фронт в мягких насыщенных средах формируется возмущениями, приносимыми звуковыми волнами I рода. При этом структура фронта ударной волны будет определяться условием равенства фазовых напряжений, и для ее изучения воспользуемся системой уравнений Х. А. Рахматулина (3.26) с учетом, однако, в выражении для силы межфазового взаимодействия дополнительного члена, пропорционального квадрату относительной скорости движения фаз.

Для изучения структуры фронта будем предполагать, как обычно, что в подвижной системе координат $\zeta = x - Ut$ реализуется одномерное стационарное движение, которое может быть, вообще говоря, разрывным. В этой системе координат уравнения движения (3.26) и неразрывности (3.11), (3.19) принимает вид

$$\rho_1(1-m)\frac{\partial u}{\partial t}+\rho_2 m\frac{\partial w}{\partial t}+\rho_1(1-m)(u-U)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+$$

$$+\rho_2 m(w-U)\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{\partial p}{\partial \zeta}=0, \tag{17.1}$$

$$\rho_2\frac{\partial w}{\partial t}+\rho_2(w-U)\frac{\partial w}{\partial \zeta}+\frac{\partial p}{\partial \zeta}+\frac{\mu}{a}m(1-m)(w-u)+b(w-u)^2=0, \tag{17.2}$$

$$\frac{\partial(1-m)\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \zeta}(1-m)\rho_1(u-U)=0, \tag{17.3}$$

$$\frac{\partial m\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \zeta}m\rho_2(w-U)=0 \tag{17.4}$$

и дополняются следующими двумя уравнениями состояния фаз:

$$\frac{\rho_1^0}{\rho_1}=\frac{1}{\sqrt{1+\beta_1\varkappa_1(p-p_0)}}, \tag{17.5}$$

$$\frac{\rho_2^0}{\rho_2}=\frac{1}{\sqrt{1+\beta_2\varkappa_2(p-p_0)}}, \tag{17.6}$$

где β_1, β_2 — сжимаемости фаз; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — коэффициенты, вообще говоря, зависящие от энтропий фаз.

Если твердая фаза составлена из частиц кварца, а жидкостью является вода, то, как известно, коэффициенты $\varkappa_i$ можно считать постоянными при изменении давления до величин порядка 10^5 *ат*. Ограничимся здесь рассмотрением ударных волн такого диапазона

давлений, при котором материалы фаз практически могут считаться баротропными, $\varkappa_l = \text{const}$. При этом существование сильных разрывов обусловлено нелинейностью уравнений движения и уравнений состояния (17.5).

В силу предположения о стационарности движения в подвижной системе координат все переменные зависят только от $\zeta = x - vt$ (решение типа бегущей волны). Тогда уравнения (17.1), (17.3)—(17.4) сразу интегрируются и приводят к следующим соотношениям, справедливым во всей области движения:

$$(1-m)\,\rho_1 u_*^2 + m\rho_2 w_*^2 + p = \rho_0 U^2 + p_0, \tag{17.7}$$

$$(1-m)\,\rho_1 u_* = -(1-m_0)\,\rho_1^0 U, \tag{17.8}$$

$$m\rho_2 w_* = -m_0\rho_2^0 U. \tag{17.9}$$

Здесь введены скорости u_*, w_* движения фаз относительно подвижной системы координат

$$u_* = u - U, \quad w_* = w - U, \tag{17.10}$$

а также использовано условие, что в область движения включено состояние покоя, где $m = m_0$, $\rho_1 = \rho_1^0$, $\rho_2 = \rho_2^0$, а также $u = w = 0$, т. е. $u_* = w_* = -U$.

Уравнение (17.2) также несколько упрощается

$$\rho_2 w_* \frac{\partial w_*}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\mu}{a} m\,(1-m)\,(w_* - u_*) + b\,(w_* - u_*)^2 = 0. \tag{17.11}$$

Заметим, что при сильных динамических возмущениях относительная скорость фаз, т. е. разность $(w_* - u_*)$, может быть велика. Этот факт учтен в уравнении (17.11), где введена дополнительная сила межфазового взаимодействия, пропорциональная квадрату относительной скорости (другими словами, здесь введен двучленный закон фильтрации).

Из уравнения (17.11) следует, что вдали за фронтом распространяющейся волны (т. е. при $\zeta \to \infty$) среда приходит в *равновесное состояние* (обозначим его индексом B), которое характеризуется равенством скоростей фаз: $u_*^B = w_*^B$. Подстановка этого соотношения в уравнения (17.6)—(17.8) приводит их к виду

$$\left[(1-m_B)\,\rho_1^B + m_B\rho_2^B\right](u_*^B)^2 + p_B = \rho_0 U^2 + p_0, \tag{17.12}$$

$$(1-m_B)\,\rho_1^B u_*^B = -(1-m_0)\,\rho_1^0 U, \tag{17.13}$$

$$m_B\rho_2^B u_*^B = -m_0\rho_2^0 U. \tag{17.14}$$

Полученные выражения связывают параметры, характеризующие равновесное состояние покоя (при $\zeta \to +\infty$), с параметрами равновесного состояния B, возникающего за прошедшим фронтом ударной волны. Таким образом, алгебраические уравнения (17.12)—(17.14) можно интерпретировать как соотношения на фронте ударной

волны в предположении, что на нем сразу, скачком равновесное состояние покоя ($u_* = w_* = -U$) заменяется на равновесное движение[1] ($u_*^B = w_*^B \neq -U$).

Поскольку оба состояния характеризуются равенством скоростей движения фаз, то полученные результирующие формулы для определения скачка давления $p_B - p_0$ со скоростью ударного фронта U должны совпадать с полученными в работе [133].

Прежде всего система может быть представлена в виде

$$-\rho_0 U u_*^B + p_B = \rho_0 U^2 + p_0, \tag{17.15}$$

$$\{(1-m_B)\rho_1^B + m\rho_2^B\} u_*^B = -\rho_0 U, \tag{17.16}$$

$$m_B = m_0 \frac{\rho_2^0}{\rho_2^B}\left(m\frac{\rho_2^0}{\rho_2^B} + (1-m_0)\frac{\rho_1^0}{\rho_1^B}\right)^{-1}. \tag{17.17}$$

Введем удельный объем рассматриваемой дисперсной среды

$$V = \frac{1}{(1-m)\rho_1 + m\rho_2}. \tag{17.18}$$

Его значение в состоянии B, если воспользоваться соотношением (17.17), можно представить в виде

$$V_B = \frac{1}{m_B\rho_2^B + (1-m_B)\rho_1^B} = \frac{1}{\rho_0}\left(m_0\frac{\rho_0^2}{\rho_2^B} + (1-m_0)\frac{\rho_1^0}{\rho_1^B}\right) =$$

$$= V_0(m_0\rho_2^B v_2^B + (1-m_0)\rho_1^0 v_1^B), \tag{17.19}$$

$$V_0 = \frac{1}{\rho_0},\quad v_1 = \frac{1}{\rho_1},\quad v_2 = \frac{1}{\rho_2},$$

Формула (17.19) использована в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица [119] (стр. 304) при рассмотрении задачи о затухании звука во влажном паре:

$$V = c_1^0 v_1 + c_2^0 v_2, \tag{17.19'}$$

где $c_1^0 = (1-m_0)\rho_1^0/\rho_0$; $c_2^0 = m_0\rho_2^0/\rho_0$ — начальные массовые концентрации фаз; v_1, v_2 — удельные объемы фаз.

Видно, что соотношение (17.19') связывает удельный объем дисперсной среды с удельными объемами фаз в условиях равенства фазовых скоростей.

В статье А. Н. Дремина и М. А. Карпухина [63] эффективная (для ударных воздействий) плотность $\rho_{эфф.}$ двухфазной среды определялась как $\rho_{эфф.} = 1/V_B$, где V_B вычислялось по формуле (17.19').

Если использовать введенную величину V, то соотношения (17.15) и (17.16) можно преобразовать к следующей, обычной для ударного скачка форме:

$$U^2 = V_0^2\frac{p_B - p_0}{V_0 - V_B}, \qquad (u_*^B)^2 = V_B^2\frac{p_B - p_0}{V_0 - V_B}. \tag{17.20), (17.21}$$

[1] Температурная неравномерность важна в связи с проблемой определения уравнения состояния вещества при высоких давлениях и температурах (см. [63, 71], а также В. Н. Николаевский. ПМТФ, 1969, № 3).

Первое из этих соотношений (17.20) можно далее записать в виде

$$U^2 = \frac{1}{\rho^0} \frac{p_B - p_0}{1 - \dfrac{m_0 \rho_2^0}{\rho_2^B} - \dfrac{(1-m_0)\,\rho_1^0}{\rho_1^B}}. \tag{17.22}$$

Соотношение (17.22) было получено Г. М. Ляховым [133] для более общего случая трехфазной среды (водонасыщенный грунт с защемленным воздухом). Однако нужно помнить, что принимаемая при этом гипотеза о равенстве фазовых напряжений справедлива лишь при весьма малом содержании воздуха, пока суммарная сжимаемость фаз гораздо меньше сжимаемости скелета среды. Кроме того, при наличии в системе воздуха необходимо учитывать происходящие при ударном сжатии изменения температуры (см. § 9). Поэтому здесь мы ограничиваемся только случаем полностью водонасыщенного грунта.

Заметим также, что согласно соотношению (17.17) величина пористости m_B может возрасти по сравнению с m_0, если $(\rho_1/\rho_1^0) > (\rho_2/\rho_2^0)$, что для слабых возмущений сводится к условию $\beta_2 < \beta_1$. Последнее, как нетрудно видеть, не выполняется для системы кварц—вода ($\beta_1 = 5 \cdot 10^{-6}\ 1/am$, $\beta_2 = 5 \cdot 10^{-5}\ 1/am$).

Перейдем теперь к рассмотрению *соотношений*, реализуемых на *самом фронте ударной волны*, например в сечении $\zeta = 0$. Для их получения нужно применить к системе уравнений исследуемого течения законы сохранения. Однако наша система состоит из трех интегралов — суммарного момента (17.17) и баланса масс (17.18)—(17.19), — которые выполняются всюду в области движения, в том числе и на линиях разрыва, где скачком меняются параметры потока и обращаются в бесконечность производные от них по координате ζ. Поэтому дополнительно требуется получить только соотношение на разрыве, следующее из дифференциального уравнения относительно движения фаз (17.21).

Проинтегрируем уравнение (17.21) по ζ в интервале $(-h, +h)$ и устремим величину h к нулю. Тогда, учитывая, что перед фронтом ударной волны было состояние покоя ($w(\zeta \geqslant +0) = -U$, $p(\zeta \geqslant +0) = p_0$), обозначая $w(\zeta = -0) = w_A$, $p(\zeta = -0) = p_A$ и предполагая конечность величины силы межфазового обмена импульса, получим

$$\frac{(w_*^A)^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \lim_{h \to 0} \int_{0+h}^{0-h} \frac{1}{\rho_2(p)} \frac{dp}{d\zeta}\, d\zeta = 0. \tag{17.23}$$

Воспользовавшись уравнением состояния для жидкости из (17.16), можно вывести ($\varkappa_2 \neq 1$) окончательное соотношение

$$\frac{1}{2}\{(w_*^A)^2 - U^2\} - \frac{1}{(\varkappa_2 - 1)\,\rho_2^0 \beta_2} \left\{(1 + \beta_2 \varkappa_2 (p_A - p_0))^{1 - \frac{1}{\varkappa_2}} - 1\right\} = 0, \tag{17.24}$$

дополняемое интегралами (17.12)—(17.14), которые принимают здесь следующий вид:

$$-m_0\rho_2^0 U w_*^A - (1-m_0)\rho_1^0 U u_*^A + p_A = \rho_0 U^2 + p_0, \tag{17.25}$$

$$(1-m_A)\,\rho_1(p_A)\,u_*^A = -(1-m_0)\,\rho_1^0 U, \tag{17.26}$$

$$m_A\rho_2(p_A)\,w_*^A = -m_0\rho_2^0 U. \tag{17.27}$$

Подчеркнем, что при непрерывном изменении параметров соотношения на разрыве должны сводиться к равенствам типа w_* ($\zeta = +0$) $= w_*$ ($\zeta = -0$).

Рассмотрим теперь частный случай *слабой ударной волны*, характеризуемой условиями

$$\beta_2\varkappa_2(p-p_0) \ll 1, \quad w = w_* + U \ll U,$$

$$u = u_* - U \ll U.$$

Тогда в пренебрежении величинами второго порядка малости соотношение на скачке (17.24) принимает вид

$$-\rho_2^0 U w_A + p_A = p_0, \tag{17.28}$$

а соотношение (17.25) записывается следующим образом:

$$-(1-m_0)\,\rho_1^0 U u_A - m_0\rho_2^0 U w_A + p_A = p_0. \tag{17.29}$$

Из соотношений (17.28)—(17.29) следует

$$-U(1-m_0)(\rho_1^0 u_A - \rho_2^0 w_A) = 0.$$

Отсюда в силу $U(1-m_0) \neq 0$ непосредственно за *слабым разрывом*, распространяющимся со скоростью U, реализуется «замороженное» состояние среды, характеризуемое равенством массовых скоростей фаз

$$\rho_1^0 u_A = \rho_2^0 w_A.$$

Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с условием (см. § 8), полученным для скоростей движения частиц в акустической волне, распространяющейся с замороженной скоростью звука ($\tau\omega \to \infty$). Действительно, скорость U распространения слабой ударной волны, определяемая соотношениями (17.24)—(17.26), совпадает с величиной v_∞. Покажем это.

Соотношения неразрывности можно выразить через возмущения пористости $m' = m - m_0$ и плотности $\rho_i' = \rho_i - \rho_i^0$

$$(1-m_0)\,\rho_1^0 u_A + m_A'\rho_1^0 U - (1-m_0)\,\rho_0' U = 0, \tag{17.30}$$

$$m_0\rho_2^0 w_A - m_A'\rho_2^0 U - m_0\rho_2' U = 0. \tag{17.31}$$

Из соотношений (17.29)—(17.31) следует система

$$\left.\begin{aligned} -U\rho_1^0 u_A &= p_0 - p_A \\ \left(\frac{1-m_0}{\rho_1^0} + \frac{m_0}{\rho_2^0}\right)\rho_1^0 u_A &= \left(\frac{1-m_0}{\rho_1^0}\rho_1' + \frac{m_0}{\rho_2^0}\rho_2'\right)U \end{aligned}\right\}, \tag{17.32}$$

исключение из которой величины $\rho_1^0 u_A$ приводит непосредственно к выражению

$$U^2 = 1/(\beta\rho_\infty), \tag{17.33}$$

поскольку $\rho_1'/\rho_1^0 = \beta_i (p_A - p_0)$. С другой стороны, скорость слабой ударной волны, соответствующая равновесному состоянию B и определяемая формулой (17.22), оказывается равной $U_B^2 = 1/(\beta\rho_0)$. Таким образом, в слабой ударной волне стационарная структура фронта невозможна [311] — замороженное и равновесное состояния распространяются с заведомо неравными скоростями. Интенсивность размыва фронта слабой ударной волны и его трансформация в непрерывную волну давления оценивается с использованием акустических уравнений — см. соотношение (17.8). Предельное непрерывное решение построено Р. И. Нигматуллиным (см. Вестн. МГУ, серия «Математика, механика», 1969, № 4, стр. 122—126).

Для возмущения пористости m_A' имеем

$$m_A' = \frac{m_0(1-m_0)}{\rho_1^0\rho_2^0}\rho_\infty(\rho_1' - \rho_2') = \frac{m_0(1-m_0)}{\rho_1\rho_2}\rho_\infty(\rho_1^0\beta_1 - \rho_2^0\beta_2)(p_A - p_0), \quad (17.34)$$

т. е. в водонасыщенном кварцевом песке, где $\beta_2 > \beta_1$, пористость на слабом скачке давления возрастать не может.

В работе Я. З. Клеймана [97] условия на сильном разрыве в многокомпонентной смеси, соответствующие уравнениям Х. А. Рахматулина [186], формулировались на основе рассмотрения баланса сил и масс. При этом Я. З. Клейман принимал, что на каждую фазу двухфазной среды действует сила, равная $(1 - m)\,p$ и mp, и именно она фигурирует в уравнениях движения фаз. Это соответствует расчетной схеме Н. А. Слезкина [198] и Био [257], тогда как в уравнениях движения Я. И. Френкеля [215] (сводящихся при равенстве фазовых напряжений к уравнениям Х. А. Рахматулина [186]) потенциалом действующих в жидкости сил служит само давление p.

Из соотношений на разрыве Я. З. Клеймана [97] для условий, аналогичных рассмотренным, следуют равенства массовых скоростей фаз и для сильных ударных волн. На самом же деле системе уравнений Х. А. Рахматулина [186] соответствует именно равенство (17.24) и только для волн слабой интенсивности они совпадают.

Для оценки ширины стационарного релаксационного слоя ударной волны необходимо решить систему интегралов (17.7)—(17.9) и нелинейного дифференциального уравнения (17.11) при начальных условиях, определяемых соотношениями на фронте ударной волны (17.24)—(17.27), при $\zeta = 0$. Из-за нелинейности системы приходится прибегать к численным методам, причем удобнее представить интегралы (17.17)—(17.19) также в виде дифференциальных соотношений

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\zeta}} = \frac{\Delta_1^0}{\Delta_0}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{\zeta}} = -\frac{\Delta_2^0}{\Delta_0}, \quad \frac{d\bar{p}}{d\bar{\zeta}} = -Q\frac{\Delta_3^0}{\Delta_0}, \quad \frac{dm}{d\bar{\zeta}} = -\frac{\Delta_4^0}{\Delta_0}, \quad (17.35)$$

где для удобства используются следующие безразмерные переменные:

$$\bar{p} = \beta_2(p - p_0), \quad \beta = \beta_1/\beta_2, \quad \bar{u} = u_*/U,$$

$$\bar{w} = w_*/U, \qquad \bar{\rho}_2 = \rho_2/\rho_2^0, \quad \bar{\rho}_1 = \rho_1/\rho_1^0,$$

$$\bar{\zeta} = \zeta\frac{\mu_0}{Ua_0\rho_2^0}, \quad Q = \rho_2^0\beta_2U^2, \quad \bar{\mu} = \mu(\bar{p})/\mu_0, \quad b_0 = \frac{bUa_0}{\mu_0},$$

$$\Delta_0 = -(1-m_0)\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} Q\bar{w}^2\bar{u}\vartheta + (1-m_0)\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} m\bar{u} - \frac{1}{\bar{\rho}_2(\bar{p})} -$$

$$- m_0 \frac{1-m_0}{\bar{\rho}_2(\bar{p})}\bar{w} - (1-m_0)\bar{w}^2,$$

$$\Delta_1 = \frac{\bar{u}(\bar{w}-\bar{u})}{\bar{\rho}_2(p)}\theta(m_0 Q\bar{w}\vartheta + m),$$

$$\Delta_2 = \frac{\bar{w}(\bar{w}-\bar{u})}{\bar{\rho}_2(p)}\theta\left\{(1-m_0)\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} Qu\vartheta + (1-m)\right\},$$

$$\Delta_3 = Q\left\{\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}(1-m_0)m\bar{u} - m_0(1-m)\bar{w}\right\},$$

$$\Delta_4 = \frac{w-u}{\bar{\rho}_2(\bar{p})} m(1-m)\theta\left\{1 - \frac{(1-m_0)\bar{u}\beta Q\rho_1^0}{(1+\beta\varkappa_1\bar{p})\rho_2^0} - \frac{m\bar{w}Q}{1+\varkappa_2\bar{p}}\right\},$$

$$\theta = \frac{\bar{\mu}(\bar{p})\,m}{\bar{k}(m)} + \bar{b}(\bar{w}-\bar{u}), \qquad \vartheta = \frac{m}{1+\varkappa_2\bar{p}} + \beta\frac{1-m}{1+\beta\varkappa_1\bar{p}}.$$

Начальные условия удобно определять следующим образом. По задаваемому значению p_A из кубического уравнения

$$AQ^3 + BQ^2 + CQ + D = 0 \tag{17.36}$$

определяется величина Q. Здесь

$$A = f_1^2 - 2f_1,$$

$$B = 2f_1(f_3+f_2) - [2f_4f_1 + 2(f_3+f_2) - f_3],$$

$$C = (f_3+f_2)^2 - 2f_4(f_3+f_2) + 2f_4f_3, \quad D = f_4^2 f_3,$$

$$f_1 = \frac{1-m_0}{m_0}\frac{\rho_1^0}{\rho_2^0}\left(1 - \frac{1-m_0}{\bar{\rho}_1} - \frac{m_0}{\bar{\rho}_2}\right), \quad f_2 = f_4\left(1 - \frac{m_0}{\bar{\rho}_2}\right),$$

$$f_3 = \frac{2}{\varkappa_2 - 1}[(1+\varkappa_2\bar{p}_A)^{1-1/\varkappa_2} - 1], \quad f_4 = -\frac{p_A}{m_0}.$$

Затем по найденному значению Q определяются значения

$$\bar{w}_A = \left(f_1 + \frac{f_2}{Q} + \frac{f_3}{Q}\right)\left(1 + \frac{f_4}{Q}\right)^{-1}, \quad m_A = -\frac{m_0}{\bar{\rho}_2\bar{w}_A}, \tag{17.37}$$

$$\bar{u}_A = -\frac{1-m_0}{\bar{\rho}_1}\frac{\bar{w}_A}{\bar{w}_A + (m_0/\bar{\rho}_2)}.$$

Пример расчета. Оценим ширину ударной волны в водонасыщенном кварцевом песке. Для этого положим: $\rho_1^0/\rho_1^0 = 2{,}65$, $\beta = 0{,}1$, $\beta_2 = 5\cdot10^{-5}\ am^{-1}$.

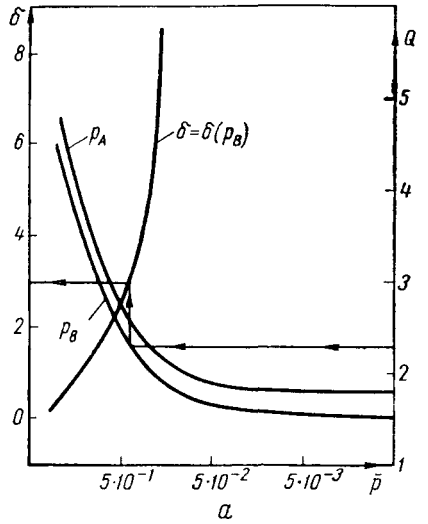
По данным работы [62] показатель $\varkappa_1$, измеряемый на ударной адиабате для мрамора, принимает значение $\varkappa_1 = 7{,}23$ до давления $p = 1{,}5\cdot10^5\ am$, а при более высоких давлениях $\varkappa_2 = 4{,}1$. Примем в связи с этим для материала твердой фазы $\varkappa_1 = 7{,}23$. Для воды можно принять $\varkappa_2 = 7{,}00$ [109].

Расчеты были выполнены также для $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 3$ (поскольку в работе [135] ранее проводились оценки соотношений на фронте ударной волны как на простом разрыве именно для таких значений параметров $\varkappa_1$, $\varkappa_2$) и для $\varkappa_1 = 3{,}96$; $\varkappa_2 = 7{,}00$.

Начальные значения пористости m_0 принимались равными 0,2; 0,3; 0,41.

При изменениях пористости среды меняется также ее проницаемость и соответственно $a(m) = a_0 (m/m_0)^n (1 - m)/(1 - m_0)$. Исходя из опытных данных Фатта [8], примем $n = 10$.

Для оценки коэффициента b (инерционных потерь) воспользуемся результатами известных экспериментальных исследований отклонений от закона Дарси, проведенных И. М. Жавороиковым, М. Э. Аэровым и Н. И. Умником [8]. Указанные опытные данные



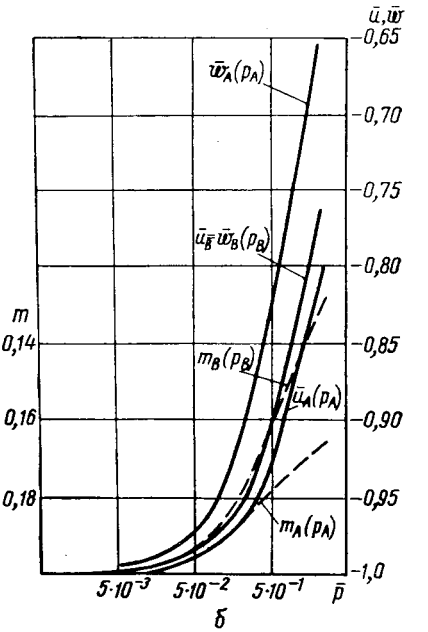


Рис. 13. Рассчитанные замороженная и равновесная ударные адиабаты и ширина фронта ударной волны (*а*), а также скорости частиц и пористость (*б*) для грунта начальной пористости: $m_0 = 0{,}2$ при $\varkappa_1 = 3{,}00$, $\varkappa_2 = 3{,}00$.

представлены в виде функции $f = f(\mathrm{Re})$ от числа Рейнольдса на рис. 3, причем

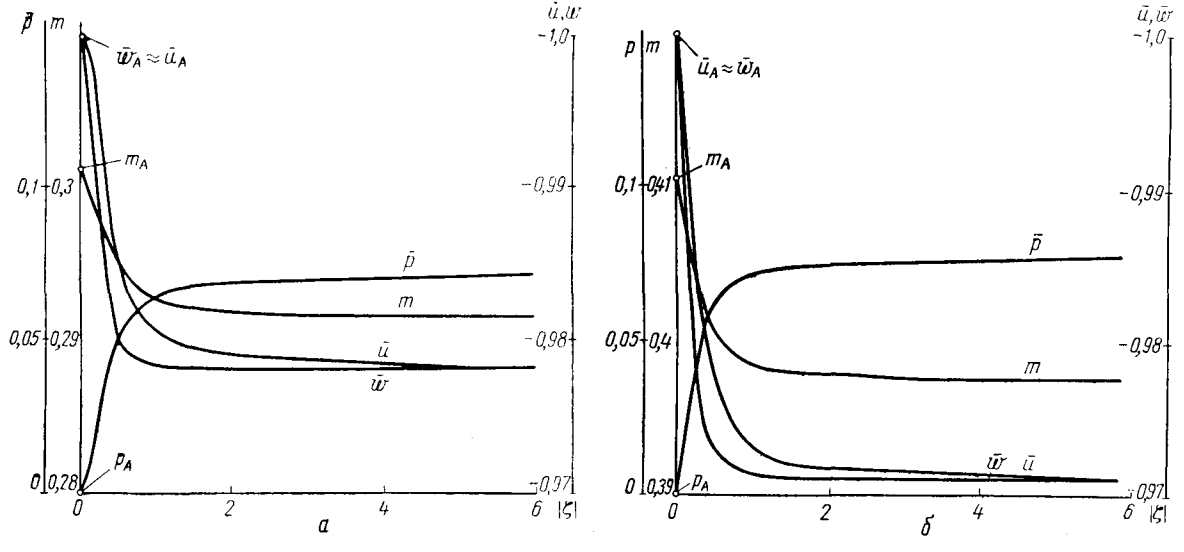
$$f(\mathrm{Re}) = 1 + \frac{ba_0}{m_0(1-m_0)\mu_0}(w-u), \qquad \mathrm{Re} = \frac{|w-u|}{\mu_0}\sqrt{\frac{a_0}{m_0(1-m_0)}}\rho_2^0. \quad (17.38)$$

Из графиков (рис. 3) видно, что функция $f(\mathrm{Re}) = 1$ для засыпки шариков пористости $m \approx 0{,}4$ и проницаемости $k \approx 3 \cdot 10^3$ д при $\mathrm{Re} \leqslant 0{,}4$, а в диапазоне $1 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 4$ может быть приближена прямой линией

$$f(\mathrm{Re}) = 1 + 0{,}35\mathrm{Re}. \quad (17.39)$$

Будем считать для простоты, что зависимость (17.39) справедлива при всех значениях числа $\mathrm{Re} \geqslant 0$ (что приводит к завышению эффекта инерционных сил сопротивления для естественных пористых горных пород: $k \approx 1$ д и менее). Тогда сопоставление соотношений (17.37), (17.38) показывает, что

$$\frac{b}{\rho_2^0}\sqrt{\frac{a}{m_0(1-m_0)}} = 0{,}35.$$



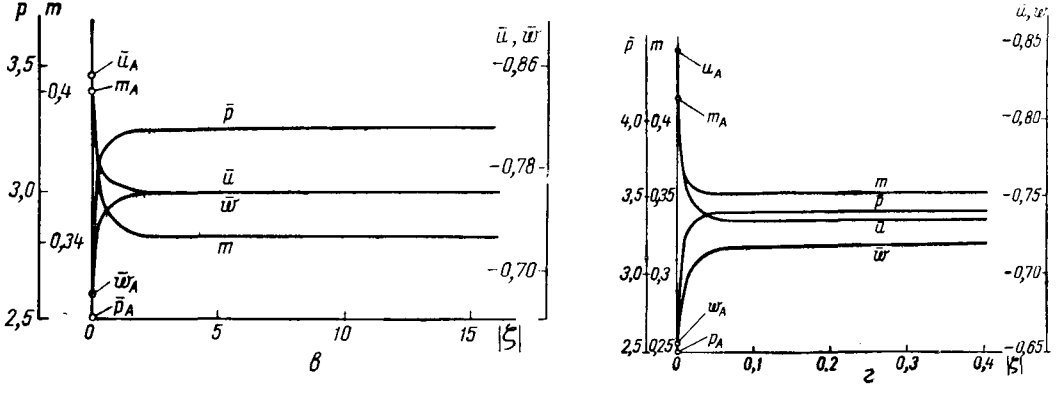


Рис. 14. Распределение параметров потока по глубине фронта ударной волны:

	Характеристика грунта		
	m_0	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$
а	0,3	7,23	7,00
б	0,41	7,23	7,00
в	0,41	7,23	7,00
г	0,41	3,96	7,00

	Характеристика грунта	
	b	Q
а	$\neq 0$	1,527
б	$\neq 0$	1,371162
в	$\neq 0$	6,87007
г	$\neq 0$	6,51525

Для рассматриваемых данных имеем [8]

$$\sqrt{a_0 m_0^{-1}(1-m_0)^{-1}} \approx 8{,}5 \cdot 10^{-4}\ см.$$

Отсюда

$$\frac{b}{\mu_0}\frac{a_0}{m_0(1-m_0)} = 2{,}98 \cdot 10^{-4}\frac{r\rho_2^0}{\mu_0}\ см.$$

Окончательно получаем

$$b_* = \frac{ba_0U}{\mu_0} = \frac{ba_0}{\mu_0}\sqrt{\frac{Q}{\rho_2^0\beta}} = 4170\sqrt{Q}\,m(1-m) \qquad (17.40)$$

при $\sqrt{\rho_2^0/\beta_2}/(\mu_0) \approx 1{,}4 \cdot 10^7\ см^{-1}$. Здесь также предполагается, что при деформациях пористой среды величина b меняется примерно так же, как и коэффициент пропорциональности в законе Дарси, т. е. что при деформациях численный коэффициент 4170 остается неизменным.

Для простоты можно также считать, что $\bar{\mu} \equiv 1$ (более строгий расчет требует учета зависимости вязкости от давления).

Результаты расчетов, проведенных на БЭСМ-2М, представлены на рис. 13—14. Численное решение системы уравнений (17.35) строилось методом Адамса — Штермера с автоматическим выбором шага. Начальные данные определялись также машинным счетом как корни кубического уравнения (17.36) по формуле Кордана, а также по соотношениям (17.37).

Начальные условия задавались в точке $\bar{\xi}_0 = -0$ и численное интегрирование проводилось до точки $\bar{\xi}_\infty < \bar{\xi}_0$, определяемой условиями: $|\bar{u}(\bar{\xi}_\infty) - \bar{w}(\bar{\xi}_\infty)| \leqslant \leqslant 0{,}00015$.

Счет контролировался сравнением получаемых значений $\bar{u}(\bar{\xi}_\infty)$, $\bar{w}(\bar{\xi}_\infty)$, $\bar{p}(\bar{\xi}_\infty)$, $\bar{m}(\bar{\xi}_\infty)$ с соответствующими значениями $\bar{u}_B$, $\bar{w}_B$, $\bar{p}_B$, m_B, подсчитанными независимо по формулам (17.15)—(17.17).

Ширина фронта ударной волны $\bar{\delta}$ оценивалась как $\bar{\delta} = |\bar{\xi}_\infty|$. На рис. 13 построены [1] графики зависимости $\bar{\delta}$ от величины полного перепада давления в ударной волне $\bar{p}_B$. Графики распределения давления, пористости и скоростей движения фаз по глубине фронта ударной волны (см. рис. 14, *а*, *б*, *в*, *г*) показывают, что практическое возрастание давления до величины p_B и выравнивание скоростей $\bar{u}$, $\bar{w}$ происходит в основном на меньшем расстоянии $\bar{\delta}_*$, оцениваемом как $\bar{\delta}_* = 0{,}1\bar{\delta}$.

Как уже указывалось, в расчете была несколько завышена роль инерционных межфазовых сил. В связи с этим были выполнены также расчеты при условии $b = 0$.

Для перехода к размерным величинам нужно воспользоваться формулами:

$$\delta = A\bar{\delta},\quad \delta_* = A\bar{\delta}_*,\quad A = \frac{Ua_0\rho_2^0}{\mu_0} = \sqrt{Q}\,\frac{a_0\sqrt{\rho_2^0}}{\mu_0\sqrt{\rho_2}}$$

при $U = 1000\ м/сек$, $a_0 = 1\ д = 10^{-8}\ см^2$, $\mu_0 = 1\ спз$, $\rho_2 = 1\ г/см^3$ имеем $A = 0{,}1\ см$. При скорости $U = 1800\ м/сек$, проницаемости $3 \cdot 10^3\ д$ (проницаемость дроби диаметром $d = 0{,}2 \div 0{,}3\ см$, для которой проводилась опытная оценка коэффициента в [8]) и $\bar{\tau} = 1$ имеем $\delta = 5\ м$, $\delta_* = 50\ см$. При проницаемости $300\ д$ соответственно $\delta_* = 5\ см$. Существенно, что ширина фронта гораздо больше характерного микромасштаба среды ($\delta_* \gg d$).

Отметим, что во всех проведенных вариантах расчета (за исключением одного) выполнялись соотношения $m_0 > m_A > m_B$, т. е. в волне сжатия происходило уплотнение среды. Единственным исключением явились результаты расчета структуры фронта ударной волны для $m_0 = 0{,}41$, $\varkappa_1 = 3{,}96$, $\varkappa_2 = 7{,}00$ (т. е. при $\varkappa_2 > \varkappa_1$) и наиболее высокого (из принятых) скачка давления p_A (рис. 14). Здесь $m_A = 0{,}413425 > m_0 = 0{,}41$.

[1] См. также результаты расчетов, опубликованные в работе [34].

Часть II

УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов, В. Н. Николаевский

Условные обозначения к II части

a_k — коэффициент изменения проницаемости;
a_m — коэффициент сжимаемости пор;
a_μ — пьезокоэффициент вязкости;
a_ρ — коэффициент сжимаемости жидкости;
b — параметр, характеризующий дополнительные (инерционные) фильтрационные сопротивления;
b' — объемный коэффициент;
C — скорость звука;
d_e — эффективный диаметр зерен породы;
$f_1(S)$ — относительная проницаемость для первой фазы;
$f_2(S)$ — относительная проницаемость для второй фазы;
F — поперечное сечение пласта;
G — массовый дебит скважины;
H — глубина пласта;
h — мощность пласта;
J — символ интеграла;
I_0, K — функция Бесселя первого и второго рода мнимого аргумента;
K — коэффициент продуктивности скважины;
k — коэффициент проницаемости;
L — расстояние от контура питания до эксплуатационной галереи;
l — перфорированная (вскрытая) часть пласта;
l' — коэффициент макрошероховатости;
m — пористость пласта;
n — показатель степени;
n_1 — число перфорационных отверстий;
$\mathscr{P}$ — функция Л. С. Лейбензона;
p_0 — начальное пластовое давление;
$p_к$ — давление на контуре питания;
$p_с$ — забойное давление;
$p_{ат}$ — атмосферное давление;
$p_к(S)$ — капиллярное давление;
p_+ — давление насыщения;
$p_{пр}$ — приведенное давление;
Q — объемный дебит;
$Q_б$ — дебит батареи скважин;
q — объемный дебит скважины (часто безразмерный);
R — радиус залежи;
R' — расстояние между возмущающей и реагирующей скважинами;
$R_к$ — радиус контура питания;
$R_с$ — радиус скважины;
R_+ — радиус линии, где давление равно давлению насыщения;

$R_у$ — условный радиус влияния скважины;

$R_б$ — радиус батареи скважин;

$R_{др}$ — радиус дренирования скважины;

$R_{пр}$ — приведенный радиус влияния скважины;

Re — параметр Рейнольдса;

R — универсальная газовая постоянная;

r — радиус окружности;

$S(p)$ — масса газа, растворяющегося в единице объема жидкости;

S — ширина залежи;

S' — параметр, характеризующий призабойную зону («скин-эффект»);

s — параметр преобразования Лапласа;

S — насыщенность порового пространства;

t — время;

t_+ — время, за которое область влияния дойдет до границы пласта;

t_n — время, соответствующее точке перегиба на кривой гидропрослушивания;

T — температура;

$T_{пл}$ — температура пласта;

$T_{ст}$ — стандартная температура;

W — доля воды в потоке;

u, v, w — скорости движения жидкости или скорости распространения волн;

v, u', v' — функции давления;

x, y, z — координатные оси;

z — коэффициент сверхсжимаемости газа;

z' — безразмерная величина;

α — коэффициент изменения гидропроводности;

α_0 — мера интенсивности обмена жидкостью между системами блоков и трещин;

$\beta_с$ — коэффициент сжимаемости среды;

$\beta_{тв}$ — коэффициент сжимаемости твердой фазы;

Γ — газовый фактор;

Γ_{ij} — суммарные напряжения;

$\gamma_п$ — удельный вес породы;

$\gamma_г$ — относительный удельный вес газа (по воздуху);

$\gamma_в$ — удельный вес воды;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — комплексные параметры для характеристики трещиноватопористых сред;

θ — безразмерное время;

$\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности;

λ — безразмерный дебит;

μ_i — молекулярный вес i-го компонента;

$\mu_н, \mu_г, \mu_в$ — вязкости нефти, газа и воды;

ξ — коэффициент, характеризующий несовершенство вскрытия пласта;

$\rho_н, \rho_г, \rho_в$ — плотности нефти, газа и воды;

σ — половина расстояния между скважинами в ряду;

σ_{ij} — истинные напряжения в скелете среды;

σ^f_{ij} — фиктивные напряжения;

$\sigma^f = \theta^f = -(\sigma^f_{11} + \sigma^f_{22} + \sigma^f_{33})/3$ — фиктивное давление;

τ — характерное время запаздывания;

φ — функция давления;

Ω — запасы газа (объем порового пространства).

Глава IV

ИСХОДНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

§ 18. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГЛУБИННЫХ КОЛЛЕКТОРОВ. УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ

Нефтегазонасыщенные пористые горные породы расположены на большой глубине и находятся под нагрузкой вышележащей толщи осадочных пород, причем результирующее горное давление в рассматриваемой пористой среде не является простым гидростатическим — вертикальная и боковая составляющие могут существенно различаться. Ограничимся здесь рассмотрением малых возмущений напряженного состояния горной пористой породы, возникающих при отборах (нагнетании) жидкости в пласт.

Фиктивные напряжения σ^f_{ij} связаны (см. § 1, 5) с переменными напряжениями σ_{ij}, поровым давлением и суммарным напряжением Γ_{ij} в пористой среде следующими соотношениями:

$$\Gamma_{ij} = (1-m)\,\sigma_{ij} - mp\delta_{ij} = \sigma^f_{ij} - p\delta_{ij}. \qquad (18.1)$$

В состоянии покоя компоненты тензора Γ_{ij} являются составляющими горного давления. Если выбрана главная система координат тензора Γ_{ij} (в полого залегающих пластах ось z этой системы должна быть направлена по вертикали к пласту, а оси x, y расположены в плоскости пласта; при сложных геологических условиях расположение главных осей далеко не так определенно), то его ненулевая диагональная компонента Γ_z отождествляется с вертикальным, а компоненты $\Gamma_x = \Gamma_y$ — с боковым горным давлением.

При *быстром* воздействии на пласт (например, при взрыве в горной породе) по всей толще осадочных пород, в том числе по насыщенной пористой среде распространяются ударные, а затем сейсмические волны. Во время прохождения волн меняются не только фазовые напряжения, но и суммарные. Однако возбуждающее воздействие (давление в каверне при взрыве) спадает весьма быстро (за тысячные доли секунды), а возникшие волны рассеиваются как из-за многократных отражений от границ слоев, так и вследствие присущих грунту и горным породам диссипирующих свойств. В результате снова устанавливается стационарное горное давление (в области малых возмущений равное первоначальному).

При *весьма медленном* способе приложения нагрузки от возмущающей границы *также в каждый момент времени излучаются волны, однако в течение* пренебрежимо малого интервала времени в толще пород устанавливается стационарное распределение напряжений, соответствующее имеющимся граничным условиям. В данном случае возбуждающая нагрузка не исчезает (в отличие от условий взрыва) за характерное время выхода на установившееся состояние, а сохраняется неизменной.

Такая картина наблюдается при обычном изменении режимов отбора (нагнетания) в нефтяных или газовых скважинах. Действительно, например, временный масштаб изменения забойного давления при этом составляет минуты, а характерное время окончания волновых процессов оценивается как L/c, где $c \sim 10^3$ *м/сек* — скорость звука; $L \sim 10^3$ *м* — характерный масштаб окружающей толщи осадочных пород, т. е. $L/c \sim$ *сек*.

Обратим внимание на определенную аналогию с поведением грунтовых вод при воздействии различных типов. В самом деле, при взрыве заряда, заложенного ниже зеркала грунтовых вод, последнее является для распространяющихся сейсмических волн неподвижной границей. Как было показано в § 5, соответствующий процесс перераспределения порового давления описывается уравнением волн в релаксирующей среде. Однако при медленном изменении порового давления в каждый момент времени реализуется стационарное состояние, описываемое, как известно, уравнением Лапласа, процесс в целом протекает квазистационарно и контролируется изменением во времени положения внешней границы. В частности, в некоторых наиболее простых случаях для описания неустановившегося движения грунтовых вод эффективным оказывается приближенное уравнение Бусинеска, учитывающее продвижения во времени внешней границы области движения — самого зеркала грунтовых вод.

При медленных изменениях забойных давлений условия на внешних границах окружающей пористый пласт толщи горных пород остаются неизменными, а сами они также практически не смещаются. Тем не менее сами горные породы могут деформироваться, и этот эффект, по-видимому, играет определяющую роль для закона перераспределения порового давления в пористом, находящемся под внешней нагрузкой пласте.

Примем противоположное *предположение, что кровля и подошва насыщенного пористого пласта идеально жесткие.*

Эта гипотеза ранее была сформулирована в работе Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [66] в задаче о нахождении напряженного состояния мягкого пласта в отсутствии разгружающего вышележащего пласта пластичных глин (деформациями зерен по сравнению с деформациями переупаковки пренебрегалось).

Предположение о жесткости кровли и подошвы эквивалентно гипотезе о плоской деформации пласта ($e_{zz} = 0$), а поэтому изменение давления на границе пласта приведет к возбуждению плоских волн, описываемых системой уравнений (5.I) — (5.IV), (5.VII) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (если температурные эффекты несущественны).

Как было показано выше в §§ 5, 8, регистрируемые изменения давления в слабо сцементированных пористых средах происходят только на более быстрой волне давления, поскольку вторая волна (волна переупаковки зерен среды) быстро затухает, а при нагрузке типа «жидкий поршень», т. е. передаваемой через жидкость, изменения давления на второй волне вообще ε-малые величины [1].

---

[1] Заметим, что изучение волн в сильно сцементированных горных породах представляет самостоятельную задачу. Тем не менее можно сказать, что хотя различие в скоростях распространения волн первого и второго рода уменьшится с ростом цементации среды, *однако затухание амплитуды второй волны будет* существеннее, поскольку за ее фронтом твердые и жидкие частицы приобретают противоположно направленные скорости.

Указанные изменения давления в пласте с мягким коллектором в условиях упругой плоской деформации будут описываться уравнением (5.29) для слабых волн в релаксирующей жидкости, которое при характерных временах T, таких, что $(\rho_\infty/\rho_0) \ll (\tau/T)$, переходит в телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_0}\right)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\beta\rho_\infty}\nabla^2 p = 0. \qquad (18.2)$$

В уравнении (18.2) нельзя пренебречь первым членом по сравнению со вторым: это было бы возможно, если $\tau/T \ll 1 - (\rho_\infty/\rho_0)$, что, однако, противоречит условию справедливости уравнения (5.29) в целом, так как $\rho_\infty \approx \rho_0$.

Если же справедлива оценка $\tau/T \ll 1$, то уравнение (5.29) можно заменить уравнением распространения звука в среде с объемной вязкостью (см. § 8), которое в силу условия своей справедливости ($T \gg \tau$) также не может быть сведено к уравнению теплопроводности.

В то же время из накопленных данных о поведении глубинных вод и нефтенасыщенных пород известно, что процесс перераспределения порового давления примерно описывается уравнением теплопроводности. Однако более существен тот факт, что согласно уравнению (5.29) величины характерных скоростей распространения волн $v_0 = 1/\sqrt{\beta\rho_0}$ и $v_\infty = 1/\sqrt{\beta\rho_\infty}$, а также время запаздывания τ, вычисляемые по значениям физических параметров пористой среды, определяют скорости изменения порового давления неизмеримо большие, нежели наблюдаемые по скважинам и нежели скорости изменения условий работы скважин.

Таким образом, полное пренебрежение деформациями окружающих пласт горных пород исключает возможность описания наблюдаемого квазистационарного перераспределения давления в пласте — согласно уравнению (5.29) изменения давления на забое скважины практически мгновенно повторялись бы во всем пласте.

Сформулируем некоторые упрощающие гипотезы о характере смещений кровли и подошвы пласта, ограничиваясь рассмотрением тонкого пористого пласта, мощность которого h (по вертикали) гораздо меньше его линейных масштабов в горизонтальной плоскости.

Каждый элемент пласта находится под воздействием постоянного вертикального горного давления Γ_∞, обусловливаемого тяжелой массой вышезалегающих горных пород. При снижении в нем порового давления под воздействием горного давления происходят деформации скелета пласта. Поскольку окружающие прочные горные породы играют при этом не только роль нагрузки, но и перекрытия, то деформации будут происходить в зоне влияния вокруг элемента со сниженным поровым давлением, а в самом элементе они будут несколько ниже, чем в отсутствие эффекта перекрытия. Другими словами, из-за этого эффекта перераспределяется дополнительная нагрузка на скелете вокруг рассматриваемой точки. Качественно видно, что с увеличением масштабов зоны снижения порового давления прогиб «балки» возрастает, а следовательно, будет соответственно увеличиваться нагрузка на скелет пористого пласта в центре зоны пониженного давления. Естественно предположить, что имеется некоторая характерная длина d зоны влияния снижения порового давления в пласте, зависящая от мощности пласта h, глубины его залегания, а также от прочностных параметров пласта и окружающей

толщи пород. Если пренебречь релаксационными свойствами горных пород, то можно считать d постоянной величиной, константой пласта, не зависящей от хода порового давления.

Желая построить элементарную теорию нестационарных процессов в пласте, примем следующую фундаментальную гипотезу о сохранении постоянства нагрузки на элементы пласта:

$$\sigma_z^t(x, y, t) - \int\int \Phi(x, y; x', y'; d)\, p(x', y')\, dx'\, dy' = \Gamma_\infty(x, y), \quad (18.3)$$

где Φ — некоторая функция влияния, а интегрирование распространено по всей плоскости пласта. При изотропии и однородности пласта допустимо приближенно считать функцию влияния, зависящей только от разности координат: $\Phi = \Phi(x - x'; y - y'; d)$.

Зададимся гауссовским видом функции влияния:

$$\Phi = \frac{1}{\pi d^2} \exp\left(-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{d^2}\right).$$

Тогда при $d \to \infty$ гипотеза (18.3) сводится к условию неизменности во времени фиктивного напряжения: $\partial\sigma/\partial t = 0$. В пределе, при $d \to 0$, функция Φ переходит в дельта-функцию Дикара: $\Phi \to \delta(x - x')\,\delta(y - y')$, а *нелокальная* формулировка (18.3) гипотезы о постоянстве горного давления переходит в обычно используемую *локальную*:

$$\sigma_z^t(x, y, t) - p(x, y, t) = \Gamma_\infty(x, y). \quad (18.4)$$

Уравнение типа (18.3) заменяет интеграл уравнения движения твердой фазы и оправдано в пренебрежении волновыми динамическими эффектами. Условие (18.3) однако недостаточно для полного определения задачи: необходимо также принять предположения о деформациях (о напряжениях) в плоскости самого пласта.

По терминологии Геертсма [292] это означает задание «граничных условий», определяющих законы фильтрации в глубинных породах. Имеется возможность введения «граничных условий» трех типов: I — задание изменений главных суммарных напряжений; II — задание деформаций всей среды в целом; III — «смешанные граничные условия» — задаются изменения напряжений по некоторым из главных осей и условия деформации по остальным. Естественно, здесь под «граничными условиями» подразумеваются условия, налагаемые на состояние каждой из макроточек пористой среды (а не только по ее физическим границам). Геертсма принимает [292], что в нефтесодержащих коллекторах граничные условия постоянны и условия на границах резервуара совпадают с условиями в каждом макрообъеме.

Были предложены две несколько отличающиеся друг от друга локальные гипотезы о характере суммарных деформаций и напряжений в глубинных коллекторах.

а. Гипотеза о постоянстве вертикального горного давления и отсутствии смещений в плоскости пласта («граничное» условие типа III)

Эта гипотеза в формуле (18.4), по-видимому, впервые была введена Джейкобом [299], который пренебрегал деформациями самых твердых частиц (что оправдано для деформаций переупаковки в мягких горных породах). Г. В. Исаков сформулировал эту гипотезу в следующей форме: «Для плоского пласта, залегающего в плоскости xy, можно принять, что в этой плоскости он деформироваться не может, т. е. $e_x = e_y = 0$, а $e_z = f(p)$, где p — давление в жидкости» [94].

В этом случае имеем

$$\sigma^f_{zz} = (1-m_0)(\lambda_1 + 2\lambda_2)\, e + \beta_1 K (1-m_0)\, p,$$
$$\sigma^f_{yy} = \sigma^f_{xx} = (1-m_0)(\lambda_1 e + \beta_1 K p), \quad e_{zz} = e \tag{18.5}$$

и для приращений напряжений $\sigma^f_{zz} = p$ (в силу соотношения $\Gamma_{zz} = \sigma^f_{zz} - p = \text{const}$ — для полных напряжений). Тогда

$$e = \frac{1-\beta_1 K(1-m_0)}{(1-m_0)(\lambda_1+2\lambda_2)}\, p; \quad \frac{\theta^f}{3} = BK\left[1 + (1-m_0)\,\beta_0\left(\frac{1}{B} - K\right)\right] p. \tag{18.6}$$

Уравнения неразрывности при этом приводят к следующему соотношению:

$$\left\{\beta - \beta_1 K\left[1 + (1-m_0)\,\beta_1\left(\frac{1}{B} - K\right) B\right]\frac{\partial p}{\partial t}\right\} + m_0 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} +$$
$$+ (1-m_0)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{18.7}$$

Из уравнения относительного движения жидкости (5.II) в пренебрежении инерционными силами (процесс протекает квазистационарно) в силу соотношения (18.7) получаем так называемое *уравнение пьезопроводности*

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa_1 \nabla^2 p, \tag{18.8}$$

$$\frac{1}{\varkappa_1} = \frac{\mu_0 m_0 (1-m_0)}{a_0} B \left\{\frac{1-\beta_1 K(1-m_0)}{1-m_0} + \frac{1}{m_0} + \beta_1 K + \frac{\beta}{m_0 B} - 2\frac{\beta_1 K}{m_0} - \right.$$
$$\left. - \frac{1-m_0}{m_0}\beta_1 K\left(\frac{1}{B} - K\right)\right\} = \frac{\mu B}{a_0}\left\{1 + \frac{\beta(1-m_0)}{B} - \right.$$
$$\left. - \beta_1^2 K (1-m_0)^2\left(\frac{1}{B} - K\right) - 2\beta_1 K (1-m_0)\right\},$$

или уравнение *упругого режима фильтрации*.

Если среда «мягкая», выражение в фигурных скобках упрощается и принимает вид

$$\varkappa = \frac{k(1-m_0)}{\mu B} = \frac{a_0}{\mu B} = c_V. \tag{18.9}$$

б. Гипотеза о постоянстве нормальных компонент горного давления («граничное» условие типа I)

Эта гипотеза была сформулирована в статье Г. И. Баренблатта и А. П. Крылова как гипотеза о постоянстве всех компонент горного давления: «Предположим, что давление на кровлю пласта остается постоянным во времени, т. е. что суммарное напряженное состояние в системе жидкость — пористая среда не меняется со временем. Пренебрегаем, далее, перераспределением касательных напряжений в пористой среде, вызываемых перераспределением давления в жидкости, т.е. будем считать, как это делается в теории консолидации грунта, что изменение давления компенсируется изменением нормальных напряжений» [10]. Математически это означает, что $\Gamma_{ij} = \text{const}$, $i, j = x, y, z$.

Запишем соответствующее предположение в виде

$$\Gamma_i = \text{const}; \quad i = j, \tag{18.10}$$

понимая его как условие неизменности нормальных компонент горного давления.

Условие (18.10) можно записать для возмущений исходного напряженного состояния в виде

$$\Gamma_i = \sigma_i^f - p = (1-m_0)(\lambda_1 e\delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}) + [\beta_1 K(1-m_0) - 1]\, p = 0, \tag{18.11}$$

откуда следует соотношение, определяющее объемные деформации

$$(1-m_0)(\lambda_1 e\delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}) = [1 - \beta_1 K(1-m_0)]\, p\delta_{ij}, \tag{18.12}$$

соответствующие изменению пластового давления на величину p. При этом реализуется гидростатическое сжатие скелета среды (при отборе жидкости $p < 0$).

При указанных исходных предположениях должны быть удовлетворены уравнения движения для жидкости

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{a_0} m_0 (1-m_0)(w_i - u_i) = 0 \tag{18.13}$$

и уравнение, получающееся из уравнений неразрывности фаз (5.III)—(5.IV) после исключения пористости

$$[\beta_1(1-m_0) + \beta_2 m_0]\frac{\partial p}{\partial t} + m_0 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + (1-m_0)\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\beta_1}{3}\frac{\partial \theta^f}{\partial t} = 0. \tag{18.14}$$

Применяя к уравнению (18.13) операцию дивергенции, получим

$$\nabla^2 p + \frac{\mu}{a_0} m_0 (1-m_0)\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \frac{\partial e}{\partial t}\right) = 0, \tag{18.15}$$

причем в силу уравнения (18.14) уравнение фильтрации (18.15) сводится к следующему:

$$\partial p/\partial t = \varkappa_{II} \nabla^2 p, \tag{18.16}$$

$$\frac{1}{\varkappa_{II}} = \frac{\mu(1-m_0)}{a_0}\left(\beta_2 m_0 + \frac{1-\beta_1 K}{K} + m_0 \frac{1-(1-m_0)\beta_1 K}{(1-m_0)K}\right),$$

где $\varkappa_{II}$ — коэффициент пьезопроводности, который определяется упругими константами среды.

Принятие каких-либо дополнительных предположений, кроме условий (18.10), в том числе и о касательных напряжениях, означает переопределение задачи. Так, при неодномерных деформациях горных пород необходимо учитывать, помимо уравнений (5.I)—(5.IV), (5.VII), уравнения совместности полных деформаций. Например, уравнение совместности деформаций в плоскости пласта имеет вид

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2\,\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{18.17}$$

Согласно выражению (18.11) деформации e_{11}, e_{22} равны и линейно связаны с давлением p. Если касательными напряжениями можно было бы пренебречь ($e_{12} = 0$), то уравнение совместности свелось бы к уравнению Лапласа $\nabla^2 p = 0$ в плоскости пласта. Отсюда уравнения совместности деформаций выполнялись бы только в стационарных течениях, когда к уравнению Лапласа сводится и уравнение пьезопроводности (18.16) для плоской фильтрации. Поэтому условие постоянства горного давления в теории упругого режима фильтрации следует формулировать только для нормальных компонент — касательные изменяются согласно (18.17); отбор жидкости может привести к возникновению весьма существенных касательных напряжений в скелете породы.

Отношение третьего члена выражения (18.16), стоящего в квадратных скобках, к первым двум, как нетрудно показать, равно

$$\frac{|\operatorname{div} u|}{|\operatorname{div} w|} = \frac{m_0}{1-m_0}\,\frac{1-\beta_1 K\,(1-m_0)}{1+(m_0\beta_2\beta_1^{-1}-1)\,\beta_1 K} = A. \tag{18.18}$$

Пусть для частиц песчаника $\beta_1 = 5\cdot 10^{-6}\ am^{-1}$, для воды $\beta_2 = 4{,}4\cdot 10^{-5}\ am^{-1}$. Для нефти в пластовых условиях, по данным [152], сжимаемость может достигать значения $\beta_2 = 8\cdot 10^{-5}\ am^{-1}$. Поэтому для реально встречающихся значений пористости $(m_0\beta_2/\beta_1) \gg 1$. Таким образом, с ростом сцементированности пористой среды (т. е. с увеличением $\beta_1 K$) величина A уменьшается. Если положить $m_0 = 0{,}2$, то для указанных выше значений β_1, β_2 величина $A = 0{,}1$ соответствует значению $\beta_1 K \approx 0{,}4$ при насыщении среды водой и $\beta_1 K = 0{,}3$ для нефтенасыщенной среды. Это говорит о том, что при $\beta_1 K \approx 0{,}3 \div 0{,}4$ (и более) можно с достаточной точностью писать

$$\frac{1}{\varkappa_{II}} = \frac{\mu\,(1-m_0)}{a_0}\left[m_0\beta_2 - \frac{1-\beta_1 K}{K}\right]. \tag{18.19}$$

Выражение (18.19) можно получить непосредственно из системы уравнений (18.12), (18.14), условия (18.10) и уравнения движения (18.13), если пренебречь в последнем скоростью смещения твердых частиц u_i по сравнению со скоростью жидкости w_i. В уравнении (18.14) величиной $(1 - m_0)\cdot(\partial e/\partial t)$ по сравнению с $m_0 \operatorname{div} \vec{w}$ пренебрегать нельзя. Действительно, при $m_0 = 0{,}2$, $\beta_1 K \approx 0{,}3 \div 0{,}4$ имеет место оценка

$$\frac{1-m_0}{m_0}\,\frac{|\operatorname{div}\vec{u}|}{|\operatorname{div}\vec{w}|} = \frac{1-\beta_1 K\,(1-m_0)}{1+(m_0\beta_2\beta_1^{-1}-1)\,\beta_1 K} \approx 0{,}5. \tag{18.20}$$

Величину $(1 - \beta_1 K)/K$ можно интерпретировать как сжимаемость породы $\beta_п$.

Таким образом, используемый обычно вывод уравнения упругого режима фильтрации [241] справедлив для сцементированных пористых сред ($\varepsilon \geqslant 0{,}3 \div 0{,}4$). Для более мягких сред уравнение пьезопроводности сохраняется, однако смещения скелета породы здесь существенны. В мягких средах $\varkappa_{II} = a_0 K/\mu$.

Геертсма считает, что в пластовых условиях реализуется гипотеза I, а в экспериментах по сжатию образцов — гипотеза II [292]. В связи с этим он отмечает, что в условиях пласта сжимаемость порового пространства будет меньше: примерно равна половине сжимаемости, измеренной в лабораторных условиях ($B = (1 + \nu)/(3\nu K) = 2/K$, $\nu = 0{,}2$).

Существенно, что подходы I, II приводят к уравнению одного и того же типа — уравнению пьезопроводности. Поскольку в реальных условиях величина параметра $\varkappa$ определяется по наблюдениям за нестационарным притоком к скважине, различия указанных локальных формулировок гипотезы о постоянстве горного давления представляют ограниченный интерес.

Рассмотрим теперь *уравнение сохранения энергии*, которое должно выполняться *при упругом режиме фильтрации* [78]. Ввиду медленности этого процесса температуры фаз в каждой точке будем считать одинаковыми ($T_1 = T_2 = T$).

Будем полагать, что $K\beta_1 \geqslant 0{,}2$, отсюда

$$\operatorname{div} \vec{w} \gg \operatorname{div} \vec{u}, \qquad \vec{w} \gg \vec{u}. \tag{18.21}$$

Скорость жидкости $\vec{w}$ можно считать величиной малой первого порядка и пренебрегать в уравнении энергии членом, пропорциональным w^2 (учитывающим кинетическую энергию жидкости). Слагаемыми вида $\vec{w} \operatorname{grad} T$, $\vec{w} \operatorname{grad} p$ пренебрегать нельзя, так как $\operatorname{grad} p$ и $\operatorname{grad} T$, вообще говоря, могут не быть малыми величинами.

Если $\vec{w}$ и $\operatorname{div} \vec{w}$ считать величинами первого порядка малости, то ввиду условий (18.21) $\vec{u}$ и $\operatorname{div} \vec{u}$ нужно считать по крайней мере величинами второго порядка малости.

В условиях упругого режима

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1^0}\right) = -\frac{m_0}{(1-m_0)}\beta_1 \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = \frac{1-\beta_1 K(1-m_0)}{(1-m_0)K}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{18.22}$$

поскольку изменения объема из-за температуры незначительны. Отсюда из уравнения неразрывности для твердой фазы

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (1-m_0)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1^0}\right) + (1-m_0)\operatorname{div} \vec{u} = 0 \tag{18.23}$$

следует, что $\partial m/\partial t \approx \operatorname{div} \vec{u}$ при $\beta_1 K \leqslant 1$. Выше было показано, что именно при $\beta_1 K \leqslant 1$ имеет смысл учитывать деформации скелета. Поэтому уравнение сохранения энергии для твердой фазы следует записывать так же, как для слабых возмущений — см. уравнение

(5.V), а в рассматриваемом случае $T_1 = T_2 = T$ и $\sigma = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{m_0}{(1-m_0)} p$ и оно принимает вид

$$(1-m_0)\rho_1^0 c_1 \frac{\partial T}{\partial t} = -m_0\alpha_1 T \frac{\partial p}{\partial t} + (1-m_0)\lambda_1 \nabla^2 T. \qquad (18.24)$$

Здесь (в отличие от § 5, часть I) через c_1 обозначена теплоемкость частиц твердой фазы на единицу массы.

Уравнение сохранения энергии для жидкой фазы (в пренебрежении членами второго и более высокого порядка малости) будет таким же, как и для среды с абсолютно жестким скелетом $T_1 = T_2 = T$ и в пренебрежении членом порядка w^2 имеем

$$m_0\rho_2 c_2 \frac{\partial T}{\partial t} + m_0\rho_2 c_2 \vec{w}(\operatorname{grad} T + z_i \operatorname{grad} p) = m_0\alpha_2 T \frac{\partial p}{\partial t} + m_0\lambda \nabla^2 T. \qquad (18.25)$$

Суммируя уравнения (18.24) и (18.25), получим уравнение сохранения энергии для всей среды в целом

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m_0\rho_2 c_2 \vec{w}}{c}(\operatorname{grad} T + z_i \operatorname{grad} p) = \frac{m_0(\alpha_2-\alpha_1)}{c}\frac{\partial p}{\partial t} + a\nabla^2 T, \qquad (18.26)$$

$$\left[c = (1-m_0)\rho_1^0 c_1 + m_0\rho_2 c_2,\ a = \frac{(1-m)\lambda_1 + m_0\lambda_2}{c}\right].$$

При $\alpha_2 \gg \alpha_1$ можно пренебречь величиной α_1. Тогда уравнение (18.26) переходит в уравнение, принятое без вывода в работе Э. Б. Чекалюка [232].

Нелокальная формулировка (18.3) гипотезы о постоянстве горного давления приводит к тому, что деформации, вызываемые эффективным давлением σ_2^f, развиваются неодновременно с деформациями, непосредственно связанными с изменениями гидростатического порового давления. Это открывает дополнительные возможности (по сравнению с [10]) для анализа упруго-пластических явлений в пласте.

Введение зависимости функции влияния Ф от времени, по-видимому, позволит учесть эффекты ползучести (релаксации напряжений) окружающей толщи горных пород.

На тот факт, что эффективное давление меняется только вместе с изменениями среднепластового давления (т. е. некоторого осредненного по площади пласта порового давления), указывал еще Г. В. Исаков [94], однако соответствующей математической формулировки основной гипотезы упругого режима фильтрации до самого последнего времени найдено не было.

§ 19. ПОРИСТОСТЬ И ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПЛАСТА КАК ФУНКЦИЯ ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Большое число измерений упругих коэффициентов проведено для мягких пористых сред — грунтов [206]; известны результаты измерений для одного из типов сцементированных горных пород [283—286]. Как правило, при исследованиях свойств сцементированных

пористых пород измеряют коэффициенты проницаемости и пористости, а также коэффициент изменения (при нагружении) порового пространства среды. При этом нагружение производят либо при запрещении оттока жидкости, либо при поддержании неизменным порового давления (т. е. в условиях дренирования).

а. Сжатие без дренирования

Классические опыты с грунтом, изложенные, например, в книге Терцаги [206], показали, что при приложении к помещенному в камеру с непроницаемыми стенками образцу мягкой горной породы с помощью непроницаемого поршня давления q давление в жидкости возрастет на ту же величину q, а осадка поршня практически не наблюдается. Соответственно было введено понятие фиктивного (эффективного) давления $\sigma^f = q - p$, изменения которого определяют существенные деформации мягких сред. Действительно, для мягких сред $\beta_1 K \ll 1$ и соотношение (5.VII) принимает обычный для механики грунтов вид

$$\sigma^f_{ij} = (1 - m_0)\,(\lambda_1 e \delta_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}). \tag{19.1}$$

Известно, что при аналогичных опытах [60, 286] со сцементированными образцами давление возрастает на величину, несколько меньшую nq. Можно было думать, что для сильно сцементированных пород справедливо иное, нежели уравнение (18.1), определение фиктивных напряжений в скелете среды, а именно:

$$\Gamma_{ij} = \sigma_{ij} - np\delta_{ij},\ n \ll 1, \tag{19.2}$$

тем более, что С. А. Христианович и Ю. П. Желтов [66] расследуют связь вида

$$\sigma^f_{ij} = \Gamma_{ij} - [1 - \in (1 - m)]\, p\delta_{ij}, \tag{19.3}$$

где $\in (1 - m)$ — площадь контактов между зернами.

Покажем, однако, что система (5.I)—(5.VII) и соотношение (18.1) не находятся в противоречии с указанными опытами.

В самом деле, при одноосной деформации, которая реализуется в таких опытах ($e_{22} = e_{33} = 0$), из соотношений (5.VII) следует

$$e = e_{11} = \frac{B\sigma^f_{11}}{1 - m_0} - KB\beta_1 p,\quad B = \frac{1}{\lambda_1 + 2\lambda_2}, \tag{19.4}$$

$$\theta^f = 3KB\sigma^f_{11} + 4\lambda_2 B\,(1 - m_0)\,K\beta_1 p. \tag{19.5}$$

Уравнения неразрывностей твердой и жидкой фаз после исключения пористости приводятся к уравнению

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta_1}{3}\frac{\partial \theta^f}{\partial t} + (1 - m_0)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + m_0 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0. \tag{19.6}$$

Проинтегрируем уравнение (19.6) по всему объему образца

$$\beta \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV - \frac{\beta_1}{3} \int_V \frac{\partial \theta^f}{\partial t} dV + (1-m_0) \int_S u_i dS + m_0 \int_S w_i dS = 0. \quad (19.7)$$

Так как на границах $u_i = w_i$, то соотношение (19.7) сводится к следующему:

$$\beta \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \frac{\beta_1}{3} \frac{\partial \bar{\theta}^f}{\partial t} + \frac{\partial \bar{e}_{11}}{\partial t} = 0, \quad (19.8)$$

где черта означает осреднение по объему V.

Если рассматривать равновесное состояние образца, то средние величины равны локальным: $p = \bar{p}$, $\theta^f = \bar{\theta}^f$, $e = \bar{e}_{11}$ и подстановка в соотношение (19.8) выражений (19.4)—(19.5) приводит при $e_{11}\,(t=0) = 0$, $\theta^f\,(t=0) = 0$, $p\,(t=0) = 0$ к соотношению

$$\left[\beta - \frac{4}{3} B\lambda_2\beta_1 K(1-m_0) - BK\beta_1\right] p = \left(KB\beta_1 - \frac{B}{1-m_0}\right) \sigma_{11}^f. \quad (19.9)$$

Отсюда в силу $\sigma_{11}^f - p = -q$ имеем окончательно

$$p = nq, \quad n = \frac{1-(1-m_0)\,\varepsilon}{1-(4/3)\,\varepsilon\,(1-m_0)^2\,\beta_1\lambda_2 + (1-m_0)\,(\beta/B)}. \quad (19.10)$$

Постоянные λ_2, B можно выразить через объемный модуль $(1-m_0)K$ и коэффициент Пуассона

$$\frac{1}{B} = K\frac{3\nu}{1+\nu}; \quad \lambda_2 = K\frac{3}{2}\frac{1-2\nu}{1+\nu}. \quad (19.11)$$

Результаты подсчетов для величины n при типичных для песчаника значениях $m_0 = 0{,}2$, $\nu = 0{,}2$, $\beta_1 = 5\cdot10^{-6}\ am^{-1}$, $\beta_2 = 4{,}4\cdot10^{-5}$ сведены для разных значений $\varepsilon_1 = \beta_1 K$ в табл. 8.

Таблица 8

$\varepsilon_1 = \beta_1 K$	$\varepsilon \ll 0{,}1$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
n	1,00	0,83	0,70	0,60	0,47	0,43
n_1	1,00	0,92	0,84	0,76	0,68	0,60

Отсюда между суммарным напряжением (горным давлением) и фиктивным реализуется связь (18.1); наблюдаемое опытное соотношение (19.2) есть следствие указанной связи (18.1) и условий деформирования образца.

б. Сжатие в условиях дренирования

Если жидкость может уходить из образца, например, в резервуар, в котором поддерживается постоянное давление p_0, то деформация при одноосном сжатии согласно соотношению (18.1) определится выражением

$$e = e_{11} = \frac{\sigma_{11}^f - (1-m_0)\,\beta_1 K p_0}{(1-m_0)\,(\lambda_1 + 2\lambda_2)} = -\frac{B}{1-m_0}\,p_{эф}, \qquad (19.12)$$

где введена величина

$$p_{эф} = -\sigma_{11}^f + (1-m_0)\,\beta_0 K p_0 = q - (1-m_0)\,\beta_1 K p_0 \qquad (19.13)$$

эффективного давления (именно это давление вызывает такую деформацию образца, как и в сухом образце, при $p_0 \approx 0$), здесь q — полная приложенная нагрузка.

Было экспериментально установлено [283—286], что изменения пористости, проницаемости и т. д. одного из типов песчаника оказываются одинаковыми при различных значениях порового давления (1 и 120 *ат*) при переменном внешнем давлении $q = 120 \div 1350$ *ат*, если эффективное давление определять по формуле

$$p_{эф} = q - 0{,}85 p_0, \qquad (19.14)$$

что, казалось бы, противоречит понятию фиктивного напряжения. Однако соотношения (19.12)—(19.13) позволяют объяснить формулу (19.14). Действительно, в табл. 8 приведены величины $n_1 = 1 - (1-m_0)\beta_1 K$, $m_0 = 0{,}2$ для разных значений ε. Видно, что значению $n_1 = 0{,}85$ для песчаников соответствует $\varepsilon \approx 0{,}2$.

Экспериментальные изучения механических свойств нефтегазоносной породы в условиях нагружения обычно преследуют одну из двух основных целей:

1) определение изменения параметров пласта при снижении (увеличении) пластового давления;

2) нахождение связи измеряемых при атмосферных условиях параметров среды (пористости, проницаемости и др.) с их значениями, соответствующими глубинным условиям (с ростом сжимающего горного давления).

При проведении опыта на скелет образца производится внешнее давление обжима, равное горному для данной глубины залегания пласта. Насыщенное поровое пространство соединено с резервуаром (бомбой) постоянного давления. В первом случае давление обжима должно в процессе проведения опытов оставаться постоянным, а поровое давление жидкости («пластовое» давление) должно уменьшаться от начального до некоторой величины (до нуля). Во втором случае необходимо изменять и давление обжима и поровое давление примерно по закону, отраженному в табл. 9 (первые три строки).

При составлении табл. 9 значение удельного веса породы в среднем принималось равным $\gamma_п = 2{,}5$ *Г/см*^{3}, а пластовое давление —

Таблица 9

Глубина залегания пласта H, *м*	500	1000	2000	3000	4000
Горное давление $\Gamma = \gamma_п H/10$, *ат*	125,0	250,0	500	750	1000
Нормальное пластовое давление $p_0 = \gamma_в H/10$, *ат*	50	100	200	300	400
Соответствующее ему фиктивное давление $\sigma^f = -\theta^f$, *ат*	75	150	300	450	600
Пластовое давление в процессе разработки p, *ат*	25	50	100	150	200
Соответствующее ему фиктивное давление $\sigma^f = -\theta^f$, *ат*	100	200	400	600	800

соответствующим гидростатическому давлению столба жидкости, выходящему на поверхность земли.

Действительно, как правило, нефтегазовые месторождения «плавают» в водонапорных пластах, сообщающихся с поверхностными водами. Однако имеются «запечатанные» залежи, пластовое давление которых выше гидростатического. Они называются *месторождениями с аномально высоким пластовым давлением* [3] и их наличие объясняется схемой эксперимента «сжатие без дренирования». Если при формировании залежи в силу каких-то причин при возрастании горного давления на мягкий пористый насыщенный пласт жидкость не имела возможности оттока, то горное давление в основном уравновешивалось давлением в жидкости, которое тем самым и стало аномально большим. При этом скелет среды остался неуплотненным, что определило существенную особенность коллектора — пористая среда таких месторождений, несмотря на большую глубину залегания, *мягкая* ($в = \beta_1 K \ll 1$), а деформации, имеющие место при отборах жидкости, — в значительной степени *необратимые*.

Характеристикой напряженного состояния скелета глубинного пористого коллектора может служить *фиктивное* давление (см. табл. 9). Отсюда можно оценить порядок необходимых в виде эксперимента изменений разности давления обжима и порового давления, примерно моделирующих фиктивные напряжения в скелете пласта. Для получения в опытах примерно таких же деформаций (без учета необратимых эффектов), как и в пластовых условиях, необходимо добиться совпадения *эффективных* давлений, — см. уравнения (19.12)—(19.13) — которые зависят не только от глубины залегания и пластового давления, но и от прочностных параметров породы. Из уравнений неразрывности и обобщенного закона Гука следует связь между приращением пористости Δm, объемной деформацией Δe образца и приращением порового давления Δp

$$\Delta m = (1 - m_0)(1 - \beta_1 K)(\Delta e + \beta_1 \Delta p), \qquad (19.15)$$

которая позволяет пересчитать связь между используемыми коэффициентами сжимаемости, определяемыми как

$$\beta_c = \frac{\Delta m}{\Delta p_*} = \frac{1}{v_0}\frac{\Delta v_{пор}}{\Delta p_*}, \quad \beta_{тв} = \frac{\Delta e}{\Delta p_*} = \frac{1}{v_0}\frac{\Delta v}{\Delta p_*}, \qquad (19.16)$$

где v_0 — начальный объем образца; Δv — изменение его полного объема; $\Delta v_{пор}$ — изменение объема пор; p_* — фиксируемая (одновременно с поровым давлением) величина приложенной нагрузки (либо само поровое давление p, либо давление обжима q, либо их разность, т. е. фиктивное давление p^f).

Однако необходимые для пересчета коэффициенты β_1, K, как правило, неизвестны (они неявно входят совместно с третьим упругим коэффициентом скелета среды, например B, также в измеряемые β_c, $\beta_{тв}$). Поэтому можно при одновременном замере β_c, $\beta_{тв}$ и давления p согласно связи (19.15) найти коэффициенты β_1 и K, а затем, определив теоретическую связь Δe и Δp_* (она различна при одноосном, боковом или всестороннем сжатии), вычислить по результатам опыта третий упругий коэффициент твердой фазы.

В литературе принята следующая терминология: β_c — коэффициент сжимаемости среды; $\beta_{тв}$ — коэффициент сжимаемости скелета, причем $p_* = p^f = -\theta^f$.

Иногда вводят такие коэффициенты сжимаемости пор:

$$\beta_п = (1/v_{пор})\,\Delta v_{пор}/\Delta p_* = \beta_c/m_0. \qquad (19.18)$$

В скелете насыщенных пористых сред существуют две системы давления (два независимых коэффициента сжимаемости, в частности β_c и $\beta_{тв}$) и только для узких классов пород, характеризуемых фиксированным значением параметра $\varepsilon = \beta_1 K$, удается найти одно эффективное давление — фиктивное для мягких пористых сред ($\varepsilon \ll 1$), эффективное — см. уравнение (19.14) — для сцементированных песчаников ($\varepsilon \approx 0{,}2$).

Приборы для определения коэффициента сжимаемости пород-коллекторов, используемые рядом авторов, во многом аналогичны.

Наиболее совершенен прибор Д. А. Антонова [2], в котором давление (прессом) на оболочку образца в камере имитирует горное давление (давление обжима). Поровое давление создается во внутренней камере и изменяется другим прессом.

Результаты опытов ряда авторов по определению коэффициентов сжимаемости среды и пор, а также изменения проницаемости приведены в сводных табл. 10 и 11 и позволяют сделать следующие качественные выводы [1].

1. Наблюдается общее уменьшение коэффициента сжимаемости с увеличением фиктивного давления. Поэтому параметры пористой

[1] В ходе экспериментов фиксировался коэффициент β_c (либо только $\beta_п = \beta_c/m_0$), но не приводились данные по соответствующему значению коэффициента $\beta_{тв}$, что исключает возможность определения упругих констант исследуемых пород.

горной породы *нелинейно* связаны со значительными изменениями пластового давления.

(Наличие в табл. 10 для некоторых опытов только одного фиксированного значения коэффициента сжимаемости соответствует форме оригинальных публикаций).

Данные опытов Фэтта [285] показывают зависимость коэффициента сжимаемости пор от фиктивного давления. (Аналогичное представление результатов Фэтта приведено в работе [60]).

Качественно это явление объясняется уплотнением среды, возрастанием площади контактов зерен и коэффициентов упругих смещений твердых частиц K и B^{-1}.

2. У песчаников с хорошо отсортированными, с хорошо окатанными зернами кварца, с небольшим (до 10%) содержанием обломочного и цементирующего материала необратимое изменение пористости отсутствовало или не превышало 2—3%. У песчаников, плохо отсортированных и плохо окатанных, со значительным (до 45%) содержанием обломочного и цементирующего материала, доломитов и известняков необратимое изменение пористости существенно (до 60% и более).

3. Пределы изменения коэффициента сжимаемости пор при сопоставимых значениях фиктивного давления для разных пород-коллекторов резко различны (см. также [60]).

Холл [297] на основании исследования 13 образцов песчаника и известняка попытался построить зависимость коэффициента сжимаемости пор от пористости. Последующие исследования [154, 155, 285] показали, что сжимаемость порового объема не может быть скоррелирована (см. также [60]) с пористостью и зависимость Холла оказалась по меньшей мере случайной (см., например, рис. 15).

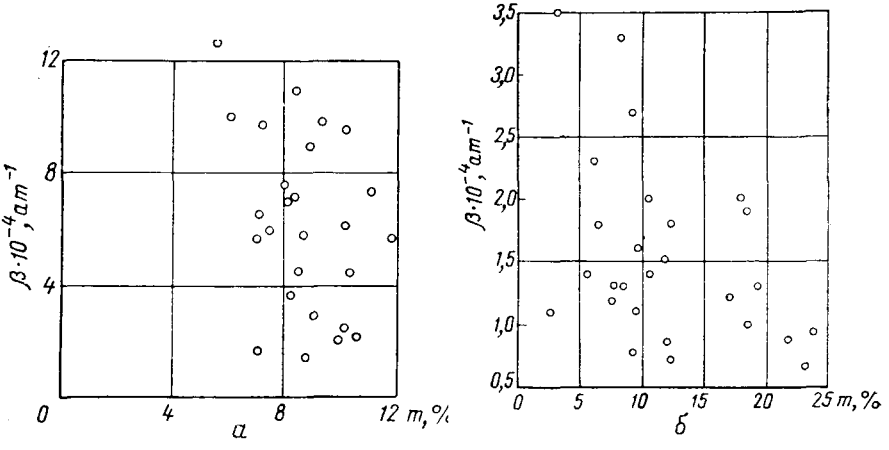


Рис. 15. Опытные данные коэффициента сжимаемости и пористости:

а — по данным Я. Р. Морозович [154] и Л. М. Морморштейна [155]; *б* — по данным Фатта [285].

№ п/п	Авторы работ	№ образца	Характеристика образца	Коэффициент проницаемости k_0, *мд*	Коэффициент пористости, m_0, %
1	2	3	4	5	6
1	Карпентер и Спенсер [266]	—	Сцементированные песчаники с глубин более 1000 *м* из пластов Вудбайн, Фрио, Строун и Бартслевиль	—	—
2	М. С. Багов, В. И. Цой [5]	1	Известняк месторождения Карабулак-Ачалуки с глубины от 1935 до 2348 *м*	0,027	12,6
		2		0,009	12,5
		3		0,002	7,6
		4		0,045	13,4
		8	То же	0,001	4,5
		9	»	—	7,5
		10	»	0,0005	6,0
		11	»	—	8,9
		12а	»	0,006	7,7
		15а	»	0,0025	8,2
		16	»	0,1	8,5
		17	»	0,005	7,3
		18	Известняк из обнажения р. Урух	0,36	21,4
3	Л. М. Морморштейн [155]	1	Песчаник с глинисто-карбонатным цементом. Пермские отложения. Новгородская область, Чардахская площадь	—	12,7
		2		—	8,7
		3		—	8,9
		4		—	6,0
		5		—	9,3
		6	То же	—	10,6
		7	»	—	11,9
		8	»	—	8,4
		9	»	—	7,0
		10	»	—	7,1
		11	»	—	7,1
		12	»	—	10,2
		13	»	—	9,1
		14	»	—	10,1
		15	»	—	7,2
		16	»	—	7,51

Таблица 10

Схема опытов	Коэффициент сжимаемости среды $\beta_c \cdot 10^{-5}$, $ат^{-1}$		Коэффициент сжимаемости пор $\beta_п \cdot 10^{-4}$, $ат^{-1}$	Характер деформации	Примечание
	при увеличении давления обжима на образец	при уменьшении давления в порах			
7	8	9	10	11	12
Всестороннее давление изменялось в пределах от 7 до 562 *ат* при давлении в порах, равном атмосферному	1—2	—	0,44—0,89	Наблюдалась незначительная остаточная деформация	При повышении давления обжима до 544 *ат* снижение объема порового пространства составляло от 2,82 до 3,608%
Для исследования использовался прибор, аналогичный прибору Д. А. Антонова. Давление обжима было всестороннее. «Пластовое» давление изменялось от 20 до 200 *ат*	5,81 3,80 2,44 2,50 — — — 5,5 — — — 6,8	— — — 0,62 0,61 1,07 1,37 0,72 — 0,53 0,79 0,5 —	4,6 3,0 3,2 1,9 0,14 1,4 2,3 0,81 7,1 6,5 0,93 0,68 3,2	Наблюдалась значительная остаточная деформация	В графе 8 приводятся результаты определения коэффициента сжимаемости с ростом только всестороннего давления от 40 до 200 *ат* при постоянном поровом давлении. В графе 9 приводятся значения коэффициента сжимаемости при изменении внутреннего давления от 200 до 20 *ат* при постоянном внешнем давлении, равном 400 *ат*
В опытах использовалась бомба высокого давления, где всестороннее давление изменялось от 1 до 400 *ат*	7,0 5,1 8,0 6,0 9,2 2,3 6,9 9,2 4,0 1,3 4,7 6,3 2,7 9,7 7,1 4,5	— — — — — — — — — — — — — — — —	5,5 5,9 9,0 10 9,9 2,2 5,8 11,0 5,7 1,8 6,6 6,2 3,0 9,6 9,8 6,0	Сведений нет	—

№ п/п	Авторы работ	№ образца	Характеристика образца	Коэффициент проницаемости k_0, мд	Коэффициент пористости m_0, %
1	2	3	4	5	6
3	Л. М. Мормортштейн [155]	17	Песчаник с глинисто-	—	11,1
		18	карбонатным цементом.	—	10,0
		19	Пермские отложения.	—	8,3
		20	Новгородская область,	—	8,1
		21	Чардахская площадь	—	8,8
		22	То же	—	8,0
		23	»	—	8,5
		24	»	—	7,1
		25	»	—	10,4
		26	»	—	10,1
		27	»	—	8,3
4	Фатт [285]	1	Пористые хорошо от-	249	15
		2	сортированные песча-	163	24
		3	ники	335	25
		4	То же	110	22
5	Д. А. Антонов [2]		Песчаники из девонских отложений месторождения Туймазы,	Значения проницаемости не указываются	Пористость образцов в среднем, повидимому, составляла 20%
		1 (255)	скв. 410, пласт $Д_{III}$		
		2 (270)	скв. 513, пласт $Д_{I}$		
		3 (312)	скв. 514, пласт $Д_{II}$		
		4 (396)	скв. 503, пласт $Д_{II}$		
		5 (718)	скв. 375, пласт $Д_{I}$		
		6 (836)	скв. 385, пласт $Д_{II}$		
		7 (872)	скв. 209, пласт $Д_{II}$		
		8 (1008)	скв. 404, пласт $Д_{III}$		
		9 (1021)	скв. 408, пласт $Д_{I}$		
		10 (1071)	скв. 445, пласт $Д_{II}$		
		11 (395)	скв. 503, пласт $Д_{II}$		
6	Фатт [285]	1	Несцементированный песок	36	—
		2	Песчаники с плохо от-	13	—
		3	сортированными зерна-	15	—
		4	ми при наличии цемен-	10	—
		5	тирующего и межзер-	12	—
			нистого обломочного материала от 20 до 45%		
		6	Песчаники с хорошо	12	—
		7	отсортированными зер-	13	—
		8	нами при наличии	13	—

Схема опытов	Коэффициент сжимаемости среды $\beta_c \cdot 10^{-5}$, $ат^{-1}$		Коэффициент сжимаемости пор $\beta_п \cdot 10^{-4}$, $ат^{-1}$	Характер деформации	Примечание
	при увеличении давления обжима на образец	при уменьшении давления в порах			
7	8	9	10	11	12
В опытах использовалась бомба высокого давления, где всестороннее давление изменялось от 1 до 400 *ат*	8,2 2,1 3,1 5,7 1,3 6,1 3,3 4,5 4,7 2,5 6,0	— — — — — — — — — — —	7,4 2,1 3,7 7,0 1,5 7,6 4,5 6,4 4,5 2,5 7,2	Сведений нет	—
Давление обжима было всестороннее и изменялось от 0 до 340 *ат*	0,6 1,68 5,0 4,4	— — — —	0,4 0,7 2,0 2,0	Процесс обратимый	В этой серии опытов для тех же образцов измерялось еще и изменение проницаемости от давления обжима
Замеры произведены при сохранении постоянного давления внутри образца, равного атмосферному, и переменного давления на оболочку от 80 до 180 *ат*, а также при переменном давлении обжима с постоянным давлением в порах	0,96 1,11 0,86 1,26 0,32 1,05 1,01 0,92 0,86 1,04 1,03	— — — — — — — — — — —	0,48 0,55 0,43 0,63 0,16 0,53 0,51 0,46 0,43 0,50 0,50	Процесс обратимый	По мере увеличения давления обжима было отмечено уменьшение коэффициента сжимаемости образцов
Всестороннее давление обжима держалось постоянным — 856 *ат*, внутреннее давление изменялось от нуля до 680 *ат*	— — — — — — —	17,0 4,3—1,8 6,8—1,2 3,5—0,74 2,64—0,84 1,76—0,72 1,34—0,52 0,95—0,36	4,7 3,3—1,4 4,5—0,8 3,5—0,74 2,2—0,7 1,47—0,6 1,03—0,4 0,73—0,28	Явления обратимых деформаций автор наблюдал на мягких слабо сцемен-	Коэффициенты сжимаемости являются функциями давления. Значения сжимаемостей приняты из графиков

№ п/п	Авторы работ	№ образца	Характеристика образца	Коэффициент проницаемости k_0, *мд*	Коэффициент пористости m_0, %
1	2	3	4	5	6
6	Фатт [285]	9	цементирующего и межзернистого обломочного материала от 10 до 30%. $d = 2{,}54$ *см*, $l = 5{,}08 - 7{,}62$ *см*	15	—
7	Холл [297]	Исследовано 13 образцов	Образцы известняка и песчаника семи разных нефтяных пластов	—	Пористость 13 образцов изменялась от 2 до 25%
8	Я. Р. Морозович [154]	1 (6.I)	Песчаники и алевролиты из скважины СГ-1	17,04	—
		2 (5.II)		7,55	—
		3 (6.III)	То же	8,33	—
		4 (13.III)	»	9,29	—
		5 (12.IVа)	»	10,7	—
		6 (2.IVб)	»	6,37	—
		7 (4.IVб)	»	12,06	—
		8 (3.VI)	»	9,52	—
		9 (6.IX)	»	11,87	—
		10 (2А—7)	Песчаники и алевролиты из скв. 2-А	23,79	—
		11 (2А—8а)		21,85	—
		12 (2А—8б)	То же	23,08	—
		13 (2А—13)	»	17,95	—
		14 (2А—14б)	»	19,27	—
		15 (2А—6)	»	18,37	—
		16 (2А—10б)	Глинисто-алевритовые породы и аргиллиты из скв. 2А	18,5	—
		17 (3.11)		12,27	—
		18 (10.III)		6,87	—
		19 (15.III)	То же	12,27	—
		20 (1. IV)	»	7,78	—
		21 (5. IV)	»	9,15	—
		22 (3.V)	»	6,2	—
		23 (5.V)	»	9,67	—
		24 (4.IX)	»	10,58	—
		25 (8.IX)	»	8,36	—
		26 (9.II)	Известняки и мергели из скв. СГ-1	—	3,38
		27 (10. II)		—	5,58
		28 (1. III)	То же	—	1,62
		29 (7. III)	»	—	11,31
		30 (8.III)	»	—	2,63
		31 (9.III)	»	—	2,01

Продолжение табл. 10

Схема опытов	Коэффициент сжимаемости среды $\beta_c \cdot 10^{-5}$, am^{-1}		Коэффициент сжимаемости пор $\beta_п \cdot 10^{-4}$, am^{-1}	Характер деформации	Примечание
	при увеличении давления обжима на образец	при уменьшении давления в порах			
7	8	9	10	11	12
	—	1,95—0,3	1,3—1,2	типованных песчаниках	
Прибор аналогичный прибору Д. А. Антонова	—	—	1,3—0,43	Остаточные деформации не отмечены	Автор на 13 образцах известняка и песчаника получил зависимость пористости от коэффициента сжимаемости. Эта зависимость не универсальна
В опытах использовалась бомба высокого давления, где всестороннее давление изменялось от 1 до 800 *am*	—	—	1,2	Сведений нет	В опытах исследовались образцы из сверхглубокой Аралсорской скважины
	—	—	1,8		
	—	—	3,3		
	—	—	0,78		
	—	—	1,4		
	—	—	1,8		
	—	—	0,86		
	—	—	1,1		
	—	—	1,5		
	—	—	0,91		
	—	—	0,88		
	—	—	0,65		
	—	—	2,0		
	—	—	1,3		
	—	—	1,9		
	—	—	1,0		
	—	—	0,70		
	—	—	0,31		
	—	—	1,8		
	—	—	1,3		
	—	—	2,7		
	—	—	2,3		
	—	—	1,6		
	—	—	2,0		
	—	—	1,3		
	—	—	3,5		
	—	—	1,4		
	—	—	4,0		
	—	—	0,53		
	—	—	1,1		
	—	—	3,6		

№ п/п	Авторы работ	№ образца	Характеристика образца	Проницаемость, k_0, *мд*	Коэффициент пористости m, доли единицы
1	2	3	4	5	6
1	Фатт, Дэвис [284]	1	Образцы песчаника с малым содержанием цементирующего материала: $d=2{,}54$ *см*, $l=7{,}62$ *см*	3,86	—
		2		40,8	—
		3		45,0	—
		4		4,35	—
		5		632,0	—
2	Фатт [285]	1	Образцы песчаника: $d=2{,}54$ *см*, $l=2{,}54$ *см*	249	0,15
		2		163	0,24
		3		335	0,25
		4		110	0,22
3	Лэтчи, Химсток и Юнг [308]	1	Чистый песчаник, содержащий 38,2% остаточной воды.	3,5	—
		2		0,47	—
		3	Загрязненный сланцевый песчаник	3,7	—
		4		3,8	—
		5	Сильно загрязненный сланцевый песчаник	0,23	—
		6		0,007	—
		7	Чистый песчаник, содержащий 17,5% остаточной воды	0,007	—
		8		3,1	—
		9	Чистый песчаник		
		10	То же	15,0	—
		11	»	3,8	—
		12	»	102	—
		13	»	8,8	—
		14	Чистый песчаник, содержащий 37,1% остаточной воды	3,0	—
				0,07	—
		15	Чистый песчаник		
		16	Чистый песчаник, содержащий 38% остаточной воды	50,5	—
				0,6	—

Таблица 11

Схема опытов	Коэффициент изменения проницаемости $a_к \cdot 10^{-4}$, am^{-1}		Характер деформации	Примечание
	при увеличении давления обжима на образцах	при уменьшении давления в порах		
7	8	9	10	11
Образцы заключались в оболочку из медной фольги и для опытов вставлялись в камеру высокого давления, где всестороннее давление повышалось до 1020 *am*	29,0 5,4 7,0 3,4 7,5	— — — — —	Сведений нет	При увеличении давления обжима до 1020 *am* проницаемость уменьшилась до 11—41% по отношению к проницаемости без обжима; наибольшее уменьшение у всех образцов происходило в пределах от 1 до 200 *am*
Образцы вставлялись в эластичный футляр, а затем в бомбу, где всестороннее давление увеличивалось до 340 *am*	3,3 7,6 1,0 1,54	— — — —	Сведений нет	На этих образцах впервые исследовалось изменение пористости и проницаемости. При давлении обжима в 340 *am* проницаемость уменьшалась до 25%, а пористость до 5%
Всестороннее давление обжима изменялось от нуля до 350 *am*. Поровое давление в жидкости во время опыта держалось постоянным	2,7 7,0 7,3 13,3 45,6 111,0 19,6 5,4 4,4 4,5 5,6 5,8 7,7 8,4 10,0 10,0	— — — — — — — — — — — — — — — —	Авторы без табличного материала упоминают о нескольких образцах, когда давление обжима увеличивалось и затем уменьшалось Для чистых песчаников первоначальная проницаемость не восстанавливалась на 4%, а в глинистых образцах необратимое снижение доходило до 60%	Для приведенных 16 образцов проницаемость при уменьшении давления не измерялось

№ п/п	Авторы работ	№ образца	Характеристика образца	Проницаемость k_0, *мд*	Коэффициент пористости m, доли единицы
1	2	3	4	5	6
4	И. А. Бурлаков, Н. П. Фурсова [39]	1	Алевролит слабокарбонатный. ЧИ АССР, площадь Зимняя Ставка, скв. IX, пласт IX, содержание глин 5,9%	108	0,273
		2	Алевролит песчаный, карбонатный, содержание глин 5,92%, $d=3$ *см*, $l=3$ *см*	100,6	0,178
5	М. М. Кусаков, Н. С. Гудок [115]	1	Мелкозернистый алевролит с песчаными зернами: $d=3$ *см*, $l=2$ *см*.	127	0,12
		2	Известняк перекристаллизованный	41	0,123
		3	Доломит	2,5	0,106
		4	Известняк крупнокристаллический	0,57	0,03
		5	Доломит крупнокристаллический	15	0,10
6	Н. П. Лещий, Л. С. Мончак, И. И. Писоцкий [130]	Исследовано более 10 образцов	Песчаники: $d=3\div3,5$ *см*, $l=3$ *см*	От 3,9 до 666,0	От 0,126 до 0,272

Схема опытов	Коэффициент изменения проницаемости $a_к \cdot 10^{-4}$, am^{-1}		Характер деформации	Примечание
	при увеличении давления обжима на образцах	при уменьшении давления в порах		
7	8	9	10	11
Исследования проводились на стандартной установке УИПК-1.	26,0	14,0	Частично необратимый, $n = 0{,}560$ *	Точки для интерпретации приняты из приводимых в работе графиков
Давлению до 600 *am* подвергалась только боковая поверхность образца.	6,1	4,6	То же $n = 0{,}754$	
Давление в жидкости не указано				
Опыты проводились на установке УИПК-1. Давлению обжима подвергалась только боковая поверхность от нуля до 600 *am*	—	—	Обратимый	Результаты приводятся графически и их трудно интерпретировать. Авторы исследовали большое количество образцов. Установили породы двух типов, характеризующие изменение проницаемости: 1) обратимое; 2) необратимое
	—	—	Необратимый	
	—	—	Существенно необратимый	
	—	—		
	—	—	То же	
Опыты проводились на установке УИПК-1. Боковое давление обжима изменялось от 25 до 490 *am*	Определить не удалось	—	Некоторые образцы имели обратимые деформации, другие необратимые	Результаты приводятся графически и их трудно интерпретировать

№ п/п	Авторы работ	№ образца	Характеристика образца	Проницаемость k_0, мд	Коэффициент пористости m, доли единицы
1	2	3	4	5	6
7	Д. В. Кутовая [116]	1	Порода трещиноватая	13	—
		2	То же	48	—
		3	»	13	—
8	А. Т. Горбунов [53]	1	Порода трещиноватая	6,4	—
		2	Трещиноватый доломит	62,2	—
		3	Глинистый песчаник с искусственной трещиной	29,7	—
		4	Мелкозернистый песчаник с искусственной трещиной	1000,0	—
		5	То же	39,0	—
		6	Доломиты с естественной трещиноватостью	8,0	—
		7	То же	14,0	—
		8	»	12,0	—
		9	»	0,005	—
		10	»	8,0	—
9	Я. Р. Морозович [154]	1	Нет данных	1590/706	24,2
		2	То же	1026/820	16,8
		3	»	16,7/19	16,0
		4	»	109/108	17,8
		5	»	20/20,4	22,3
		6	»	—	7,55
		7	»	—	18,5
		8	»	—	21,85

* Здесь n — отношение коэффициента изменения проницаемости при увеличении давле

Продолжение табл. 11

Схема опытов	Коэффициент изменения проницаемости $a_к \cdot 10^{-4}$, am^{-1}		Характер деформации	Примечание
	при увеличении давления обжима на образцах	при уменьшении давления в порах		
7	8	9	10	11
Исследования проводились на установке УИПК-1. Давление обжима изменялось от 30 до 300 *am*	180 140 150	— — —	Процесс, вероятно, необратимый	Проницаемость снижалась практически до нуля
Опыты проводились на модернизованной установке УИПК-1. Всестороннее давление обжима изменялось от 10 до 300 *am* при постоянном давлении в фильтрующей жидкости до 10 *am*	180 130 500 600 45 116 111 80 40 140	— — — — — — — — — —	— Процесс необратимый $n=0$ То же — — Процесс необратимый $n=0$ — — — —	Наибольшее уменьшение проницаемости происходило в диапазоне увеличения давления обжима от 10 до 100 *am*
В опытах всестороннее давление изменялось от 1 до 800 *am*	20 10 7,6 6,2 5,5 6,5 11 7,5	— — — — — — — —	Процесс, по-видимому, необратимый Процесс обратимый То же » » » »	В графе 5 в числителе указаны проницаемость до опыта, а в знаменателе — после опыта

ния обжима к этому же коэффициенту при уменьшении давления обжима.

Приборы, используемые для исследования изменения проницаемости в зависимости от давления обжима, во многом между собой аналогичны. Из отечественных наиболее распространен прибор (установка) УИПК.

Основные части этой установки — кернодержатель и устройство, позволяющее задавать постоянный расход жидкости и газа. Давление, создаваемое прессом, передается через резиновую оболочку на образец, моделируя горное давление. Изменением давления на входе и выходе из образца моделируется поровое («пластовое») давление.

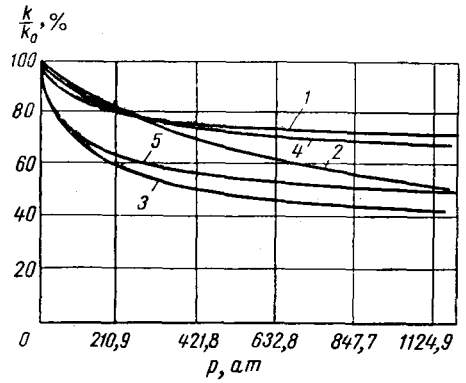


Рис. 16. Зависимость коэффициента проницаемости от давления (по данным Фатта и Дэвиса):

k — проницаемость под давлением, k_0 — проницаемость при нулевом давлении перегрузки. *1—5* — экспериментальные кривые (характеристики образцов не приводятся — *А. Г.*).

Анализ исследований по определению изменения проницаемости от давления обжима позволил выявить следующие общие закономерности.

1. Экспериментальные исследования (Фатт [283, 284], М. М. Кусаков, Н. С. Гудок [115] и другие [39, 130, 308]) показывают значительные изменения коэффициента проницаемости от давления, причем это изменение [283] гораздо больше, чем изменение пористости от давления.

Фатт [283] исследовал четыре образца песчаника с проницаемостью от 110 до 335 *мд* и с пористостью от 15 до 25%. Как видно из графиков (рис. 16—18), при возрастании давления обжима от нуля до 340 *ат* проницаемость уменьшилась до 25%, а пористость до 5%.

2. Исследования Д. В. Кутовой [116], А. Т. Горбунова [53] показали, что изменение проницаемости трещиноватых пород значительно больше, чем у пористых коллекторов. На некоторых образцах отмечалось вообще затухание фильтрации вследствие смыкания трещин.

3. Результаты работ [53, 115, 283, 284, 308] показывают, что при изменениях эффективного давления от 80 до 160 *ат* проницаемость уменьшается на 6—21% и более. Отсюда видна необходимость учета эффекта изменения проницаемости при изменениях порового давления в пласте.

4. Эффект анизотропии проницаемости с ростом давления обжима уменьшается. При сжатии как горизонтальная, так и вертикальная компоненты проницаемости при давлениях обжима уменьшаются, но меньшая (как правило, вертикальная) проницаемость уменьшается быстрее, чем горизонтальная, что и приводит к уменьшению их различия.

5. Относительные проницаемости для воды и нефти существенно зависят от давления обжима на породу (см. опыты Ферреля и других [287] и Вилсона [328]).

6. Выделяются [39, 115, 283, 286] породы-коллекторы двух типов: с *обратимым* изменением проницаемости при увеличении и последующем уменьшении эффективного давления (песчаники с хорошо

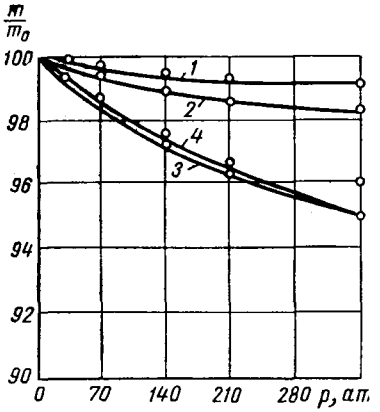


Рис. 17. Изменение коэффициента пористости от давления обжима (по Фатту):

№ кривой	Проницаемость k_0, *мд*	Проницаемость m_0, %
1	249	15
2	163	24
3	335	25
4	110	22

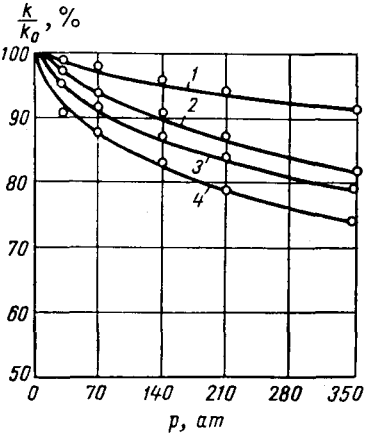


Рис. 18. Изменение коэффициента проницаемости от давления обжима (по данным Фатта):

Обозначения те же, что и на рис. 17.

отсортированными, окатанными зернами с малым содержанием (до 10%) цемента и обломочных материалов и с *необратимым* ходом зависимости проницаемости от давления (песчаники с плохо отсортированными зернами со значительным содержанием обломочного и цементирующего веществ, известняки и трещиноватые доломиты).

Некоторые породы при малых эффективных давлениях деформируются обратимо, а при достижении некоторого критического состояния становятся необратимыми.

Опыты [53, 57, 115] показали, что повторные многократные циклы нагружения и разгрузки уменьшают проницаемость и в еще большей степени — скорость изменения проницаемости с давлением.

Аналитическое представление опытных данных

Графики зависимостей пористости и проницаемости от эффективного давления имеют одну и ту же форму: они представляются кривыми, выпуклыми к осям k/k_0 и m/m_0. Кривые $k\,(p^f)$ и $m\,(p^f)$

с удовлетворительной степенью точности на значительных интервалах изменения эффективного давления описываются экспоненциальной зависимостью:

$$k = k_0 \exp[a_{k1}(p^f - p_0^f)], \quad m = m_0 \exp[a_m(p^f - p_0^f)], \quad (19.19)$$

где k_0, m_0 — параметры при стандартном фиктивном давлении p_0^f; k, m — то же при текущем фиктивном давлении p^f; a_k и a_m — соответственно коэффициент изменения проницаемости и коэффициент сжимаемости пор в $1/am$; $p^f = -\theta^f$.

Результаты обработки опытных данных Фатта [283, 286], Лэтчи, Химстока и Юнга [308], Д. В. Кутовой [116], а также А. Т. Горбунова [53] по экспоненциальному закону (2.19) приведены в табл. 11. Можно считать, что $\beta_п \approx a_m$.

Из данных табл. 10, 11 видно, что коэффициенты изменения проницаемости a_k для пористых сред получились примерно порядка 10^{-3}—10^{-2} am^{-1}, т. е. на два порядка больше, чем коэффициенты сжимаемости пор $a_m \approx \beta_п$. Из анализа опытных данных [53, 308] можно сделать еще один важный вывод о том, что коэффициент изменения проницаемости a_k возрастает с увеличением глинистости и трещиноватости пород.

Сделаем следующее замечание. Поскольку приведенные здесь опытные данные будут использоваться ниже в предположении о выполнении гипотезы о постоянстве горного давления (18.1), то изменения пластового (порового) давления равны по величине и противоположны по знаку изменениям фиктивного давления.

Были предложены иные аналитические представления закона изменения проницаемости от изменения пластового давления [7, 38, 67, 114] соответственно:

$$k = k_0[1 - a_{k2}(p_0 - p)], \quad k = k_0[1 - a_{k3}(p_0 - p)]^2, \quad (19.20)—(19.21)$$

$$k = k_0[1 - a_{k4}(p_0 - p)]^3, \quad k = k_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-a_{ks}}. \quad (19.22)—(19.23)$$

В формуле (19.23) коэффициент a_{ks} — безразмерный.

Для *фиксированной* пористой среды проницаемость может быть выражена как функция пористости среды

$$k = k_0\left(\frac{m}{m_0}\right)^{a_k/a_m} \quad (19.24)$$

Для песчаных пород справедлива оценка $(a_k/a_m) \approx 10$.

В ряде американских работ приведенные здесь результаты используются для пересчета лабораторно определенных констант — коэффициента пьезопроводности (в линейной теории упругого режима фильтрации), скоростей распространения продольных волн или же проницаемости среды — на условия больших глубин и соответствующих *начальных пластовых давлений*. В отличие от этого направления в предлагаемой работе исследуются эффективные изменения *текущего* порового давления при движении жидкости (газа), которые не могут быть учтены простым изменением значений постоянных в линейной теории, а требуют построения нелинейной теории.

§ 20. СВОЙСТВА ПЛАСТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ, ГАЗОВ И ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СМЕСЕЙ

Типичные кривые зависимости плотности ρ и вязкости μ пластовой нефти от давления приведены на рис. 19. При уменьшении пластового давления ниже начального наблюдается объемное расширение нефти и изменяется ее структура, вследствие чего плотность и вязкость уменьшаются. Это происходит до давления насыщения, при котором начинается выделение из нефти растворенного в ней газа, что снова приводит к увеличению плотности и вязкости нефти.

Количество растворенного газа в нефти при снижении давления до давления насыщения остается постоянным, но при дальнейшем падении давления содержание газа начинает уменьшаться вследствие выделения газа. Количество растворенного газа в 1 m нефти колеблется от нескольких кубометров до нескольких их сотен.

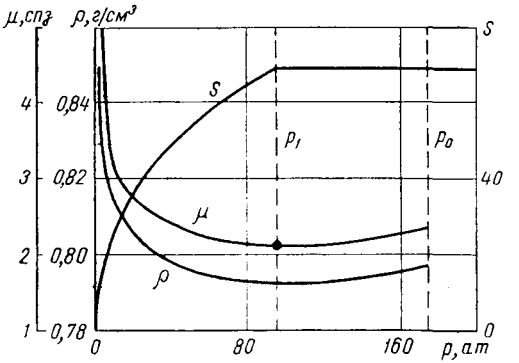


Рис. 19. Зависимость основных параметров нефти от давления.

Объемный коэффициент b' $\left(\text{где } b' = \frac{1}{V}\frac{dV}{dp}\right)$ вследствие указанных причин изменяется в зависимости от давления следующим образом. При снижении давления от пластового до давления насыщения наблюдается незначительный рост объемного коэффициента, а ниже давления насыщения при дальнейшем снижении давления до атмосферного этот коэффициент уменьшается до единицы.

Проблеме изменения плотности ρ и вязкости μ в зависимости от давления выше давления насыщения посвящено значительное число работ [22, 108, 234], из которых отметим работу Г. В. Черченко [234], где приведены следующие результаты лабораторных измерений.

Вязкость пластовых нефтей изменяется в основном при изменении давления, температуры, количества и компонентного состава растворенного газа. Зависимости вязкости масел, нефтей и воды от давления допускают в значительных пределах (до 1000 am) и более приближение экспоненциальной связью

$$\mu = \mu_0 \exp\left[-a_\mu (p_0 - p)\right]. \qquad (20.1)$$

В более узких интервалах давлений рассматриваемая зависимость имеет почти линейный характер

$$\mu = \mu_0 \left[1 - a_\mu (p_0 - p)\right]. \qquad (20.2)$$

Здесь μ_0 — вязкость при каком-то стандартном давлении p_0; a_μ — коэффициент, зависящий от состава жидкостей, в $1/am$.

Параметр a_μ, в литературе [234] названный пьезокоэффициентом вязкости, является основным критерием при оценке влияния давления на вязкость пластовых и разгазированных нефтей.

Вязкость нефти и воды резко изменяется под влиянием температуры. В работе [234] на основе большого экспериментального материала показано, что изменение вязкости нефтей Поволжья от температуры T наилучшим образом описывается уравнением Рамана

$$\mu = \exp\left(A + \frac{B}{T}\right), \qquad (20.3)$$

где A и B — константы жидкости.

Таблица 12

Месторождение, горизонт, пласт, скважина	Давление p, am	Вязкость нефтей (в $cпз$) при температуре в °С				
		20	35	50	65	80
Мухановское, угленосный пласт I, скв. 9	300	5,05	3,70	2,82	2,19	1,74
	200	4,52	3,34	2,55	1,96	1,56
	150	4,28	3,18	2,39	1,87	1,46
	100	4,07	3,01	2,25	1,74	1,36
Покровское, угленосный, пласт $Б_2$, скв. 110	300	5,76	3,84	2,90	2,30	1,82
	200	5,04	3,50	2,65	2,06	1,61
	150	4,67	3,35	2,43	1,96	1,53
	100	4,38	3,20	—	—	1,42
Зольненское, угленосный, пласт $Б_2$, скв. 22	300	2,21	1,63	1,28	1,04	0,86
	200	1,93	1,46	1,15	0,93	0,76
	150	1,80	1,37	1,09	0,87	0,71
	100	1,67	1,28	1,01	0,83	0,61
Зольненское, пашийские слои, 1 горизонт, 90	300	1,41	1,17	0,95	0,87	0,80
	200	1,28	1,07	0,87	0,77	0,73
	150	1,21	1,02	0,84	0,77	0,71
	100	1,18	0,94	0,81	0,70	0,60
Красный Яр, угленосный, пласт $Б_2$, скв. 1	300	4,68	3,38	2,50	1,96	1,50
	200	4,15	3,05	2,25	1,75	1,41
	150	3,91	2,87	2,11	1,64	1,32
	100	3,65	2,70	1,97	1,54	1,25
Султангулово, турнейский ярус, скв. 110	300	20,78	10,36	6,7	4,75	3,60
	200	17,78	8,95	5,85	4,20	3,20
	150	16,20	8,25	5,45	3,90	3,10
	100	14,50	7,55	5,00	3,65	2,90

Экспериментальные данные могут быть приближены (табл. 12, 13) экспоненциальной зависимостью

$$\mu = \mu_0 \exp\left[-a_{\mu T}(T_0 - T)\right]. \qquad (20.4)$$

Таблица 13

Месторождение, горизонт, пласт	Пьезокоэффициент $a_\mu \cdot 10^{-3}$ (в am^{-1}) при температуре в °С					Пьезокоэффициент $a_\mu \cdot 10^{-3}$ (в $град^{-1}$) при давлении в am			
	20	35	50	65	80	300	200	150	100
Мухановское, угленосный, пласт I	1,1	1,0	1,1	1,1	1,2	1,9	1,9	1,9	1,7
Покровское, угленосный, пласт $Б_2$	1,4	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	2,1	2,0	1,7
Зольненское, угленосный, пласт $Б_2$	1,4	1,2	1,2	1,15		1,8	1,7	1,7	1,7
Зольненское, пашийские слои, I горизонт	1,0	0,9	0,83	1,0	0	1,1	1,1	1,1	1,3
Красный Яр, угленосный, пласт $Б_2$	1,2	1,1	1,1	1,2	0,86	2,0	2,0	2,0	1,9
Султангулово, турнейский ярус	1,6	1,5	1,4	1,3	1,1	3,7	3,6	3,5	3,4

Экспериментальные зависимости плотности от давления также удовлетворительно приближаются следующими формулами:

$$\rho = \rho_0\left[1 - a_\rho(p_0 - p)\right], \quad \rho = \rho_0 \exp\left[-a_\rho(p_0 - p)\right], \qquad (20.5)$$

где a_ρ — коэффициент сжимаемости жидкости при постоянной температуре T.

Значение коэффициента сжимаемости a_ρ для нефтей разных месторождений колеблется в довольно широких пределах от 10^{-5} до $10^{-3}\ am^{-1}$.

Первая формула из (20.5) пригодна для относительно малых интервалов изменений давления p, а вторая — при значительных его изменениях.

Экспериментальные зависимости плотности от температуры также имеют вид

$$\rho = \rho_0\left[1 - a_{\rho T}(T_0 - T)\right], \quad \rho = \rho_0 \exp\left[-a_{\rho T}(T_0 - T)\right], \qquad (20.6)$$

где $a_{\rho T}$ — коэффициент изобарического расширения при постоянном давлении p.

Формулы (20.5) и (20.6) существенны для пересчета плотности жидкости от атмосферных до пластовых условий.

Коэффициенты a_ρ и $a_{\rho T}$ в определенных пределах изменения давления и температуры практически постоянны и находятся экспериментально.

Предположение об идеальности природных газов оправдано в расчетах добычи газа на месторождениях с небольшими пластовыми давлениями (90—60 am) и отборами газа при депрессиях порядка 1—5 am.

В настоящее время в практике все чаще встречаются месторождения с высокими пластовыми давлениями (200—350 *ат*), которые иногда эксплуатируются (например, Шебелинское газовое месторождение) с очень большими депрессиями, доходящими до 140 *ат*. В этих условиях необходимо учитывать зависимости вязкости газа μ и коэффициента сверхсжимаемости газа z от давления.

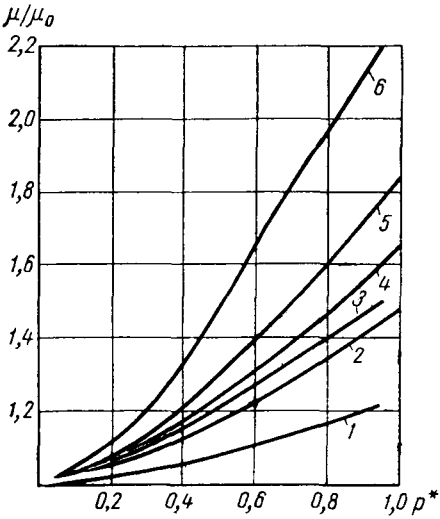


Рис. 20. Характерные зависимости вязкости газа от давления для газоконденсатных месторождений Краснодарского края.

Месторождения: *1* — Сердюковское; *2* — Каневское; *3* — Майкопское; *4* — Ленинградское; *5* — Старо-Минское; *6* — Кущевское.

На основании большого количества исследований по вязкости природных газов были составлены корреляционные графики вязкости природного газа [95].

Присутствие сероводорода, азота и углекислого газа приводит к увеличению вязкости газовых смесей.

Вязкость газовых смесей можно также вычислить по следующей формуле:

$$\mu_{см} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \sqrt{M_i}}{\sum_{i=1}^{p} x_i \sqrt{M_i}}, \qquad (20.7)$$

где $\mu_{см}$ — вязкость смеси; μ_i — вязкость i-й компоненты; x_i — молярная доля i-й компоненты в смеси; M_i — молекулярный вес i-й компоненты.

Таким образом, по формуле можно рассчитать вязкость природного газа, если известен его компонентный состав.

С изменением приведенного давления $p_{пр}$ от 1 до 6 (т. е. примерно от 500 до 250 *ат*) вязкость газов изменяется почти в 2 раза при $T_{пр} = 1{,}6$. При других значениях $T_{пр}$ эти изменения еще больше. Характерные зависимости вязкости газа от давления для газоконденсатных месторождений Краснодарского края приведены на рис. 20, где изображены зависимости $\mu/\mu_0 = f(p^*)$ — отношения вязкости газа μ при давлении p к вязкости газа при атмосферном давлении — от безразмерного отношения $p^* = p/p_0$ по данным В. Н. Петрова (p_0 — начальное пластовое давление).

Экспериментальные данные зависимости вязкости газа от давления (рис. 20) показывают, что они также описываются (при $T = \text{const}$) зависимостями (20.1).

Зависимость коэффициента сверхсжимаемости z природных газов от приведенных давления и температуры показана на рис. 21. График на рис. 21 построен Брауном [22] по данным Бумера, Джонсона,

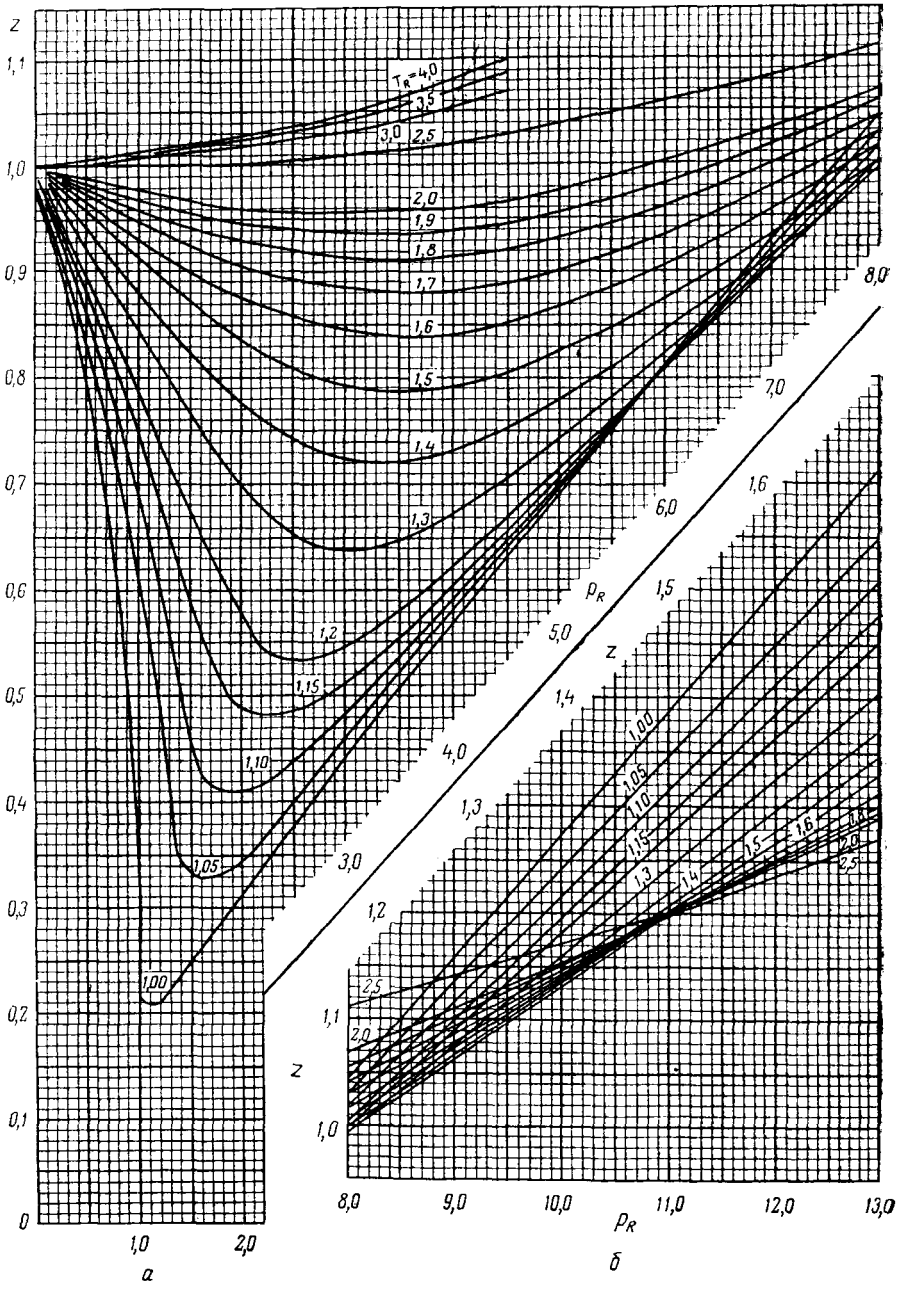


Рис. 21. Зависимость коэффициента сверхсжимаемости природных газов от приведенных давлений и температур:

а — до давления 700 *ат*; *б* — при давлении от 700 до 1400 *ат*.

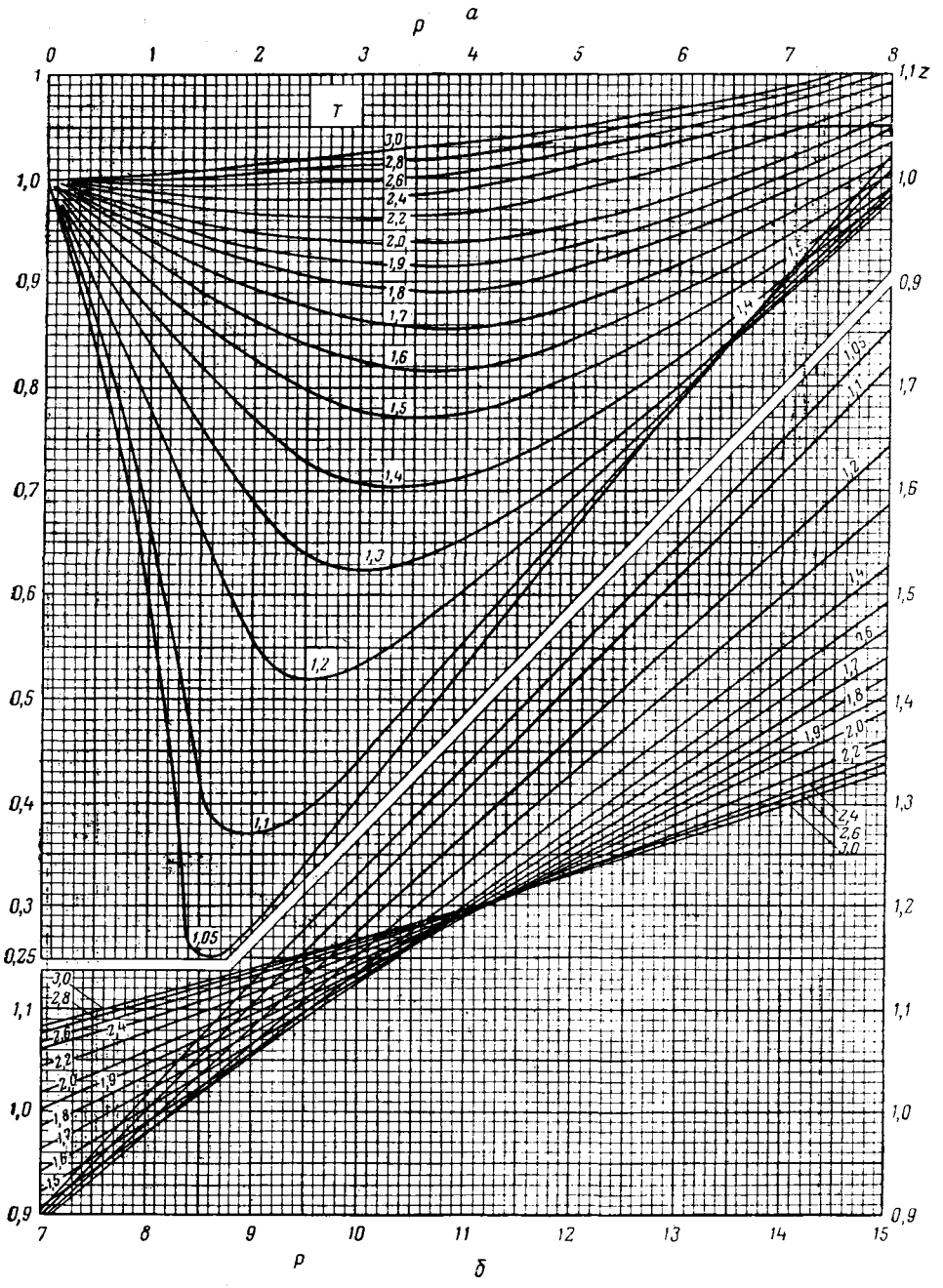


Рис. 22. Зависимость коэффициента сверхсжимаемости для чистого метана от давления и температуры:

а — до давления 700 *ат*; *б* — при давлении от 700 до 1400 *ат*.

Сейджа, Леси и других для природного газа с относительным (по воздуху) удельным весом $\gamma = 0{,}63—0{,}65$. Исследования Н. А. Тривус и др. [210] по экспериментальной проверке графика Брауна показали его применимость с точностью $\pm 4\%$ для природных газов с содержанием метана более 90% по объему, причем коэффициент сверхсжимаемости выше, чем по графику Брауна, и ближе к значениям коэффициента сверхсжимаемости для чистого метана, которые

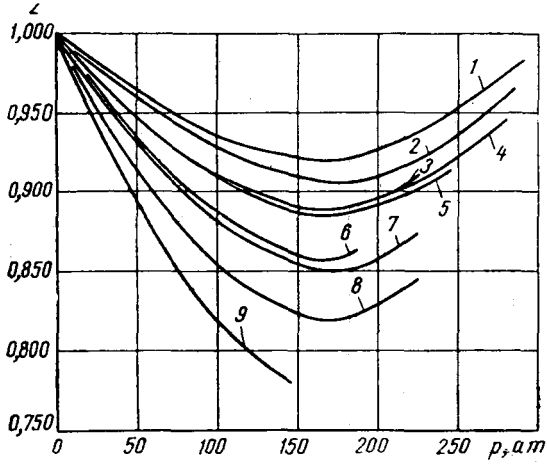


Рис. 23. Характерные зависимости коэффициента сверхсжимаемости по газоконденсатным месторождениям Краснодарского края:

1 — Майкопское; *2*—Сердюковское; *3* — Челбасское; *4* — Березанское; *5* — Крыловское; *6* — Каневское; *7* — Ленинградское; *8* — Старо-Минское; *9* — Кущевское.

показаны на рис. 22. На рис. 23 приводятся характерные графики зависимости коэффициента сверхсжимаемости от давления по газоконденсатным месторождениям Краснодарского края.

Как видно из графиков рис. 22, значения z при изменении $p_{пр}$ от 1 до 6 (т. е. от 500 до 250 *am*) отклоняются от $z = 1$ на 18% (для $T_{пр} = 1{,}6$). При других значениях $T_{пр}$ указанные отклонения будут еще большими.

Как и при рассмотрении коэффициента вязкости, при малых и больших изменениях давления можно принять следующие зависимости коэффициента сверхсжимаемости от давления

$$z = z_0 [-a_z (p_0 - p)],$$

$$a_z = \frac{1}{z_0} \frac{dz}{dp}, \qquad (20.8)$$

$$z = z_0 \exp [-a_z (p_0 - p)],$$

$$a_z = \frac{1}{z} \frac{dz}{dp}.$$

Представляет значительный интерес рассмотреть зависимость произведения $\mu^* z$ от давления. Замечено, что в диапазоне практически встречающихся температур $T_{пр} = 1{,}4 \div 2{,}0$ зависимость $\mu^* z$ от $p_{пр}$ можно представить в виде

$$\mu^* z = \sigma + \psi\,(p_{пр}^2 - p_п^2), \quad (20.9)$$

где σ и ψ — коэффициенты, зависящие от температуры. Значения σ и ψ при различных величинах $T_{пр}$ приведены в табл. 14.

Особые свойства присущи газу, находящемуся в химическом

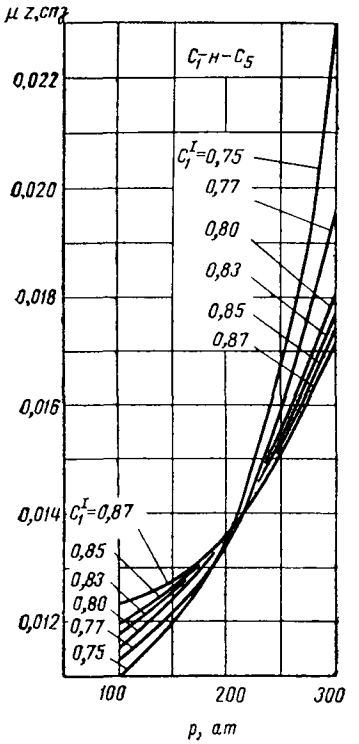


Рис. 24. Зависимость произведения вязкости μ и коэффициента сжимаемости z смеси метан — $н$-пентан от давления при различных фазовых концентрациях метана в газовой фазе.

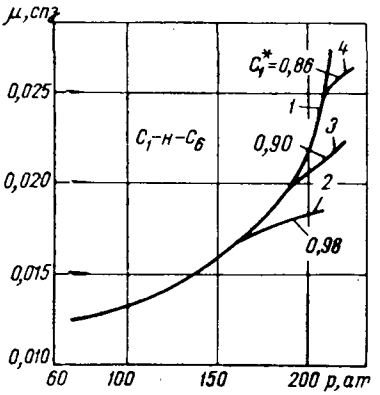


Рис. 25. Зависимость вязкости смеси метан — $н$-гексан от давления:

1 — с учетом изменения состава газовой фазы; *2*, *3*, *4* — отклонения от кривой *1* при давлениях выше давления начала конденсации.

Таблица 14

$T_{пр}$	σ	ψ
1,4	0,954	0,0442
1,5	0,980	0,0327
1,6	1,000	0,026
1,8	1,02	0,0183
2,0	1,05	0,0133

равновесии с жидкой фазой. Эти свойства становятся определяющими при фильтрации газоконденсатной смеси. В самом деле, выше отмечалась существенная связь физических параметров углеводородных

газов от их компонентного состава (см. также рис. 24, где эта связь показана на зависимости вязкости газа от давления).

Известно также, что условия химического равновесия таких систем, как «газ — жидкий конденсат», тоже изменяются с изменением давления. Поэтому при снижении давления в газоконденсатных смесях ниже давления начала конденсации (но выше конца ретроградного испарения) вязкость газовой фазы, ее сжимаемость изменяются вследствие общей зависимости вязкости газа неизменного состава от давления, а также изменения компонентного состава газовой фазы (рис. 25). Результирующей будет новая, еще более сильная связь параметров газа с давлением. При этом вязкость уменьшается с падением давления до давления максимальной конденсации, поскольку на этом участке в жидкую фазу переходят тяжелые компоненты, газовая фаза облегчается, но при дальнейшем снижении давления начинается обратное испарение, газовая фаза обогащается и вязкость ее растет. График на рис. 24 иллюстрирует соответствующий перелом зависимости вязкости газа от давления в точках начала конденсации. Подчеркнем, что этот эффект вполне аналогичен изменению хода кривой «вязкость — давление» газированной жидкости при давлении насыщения.

Глава V

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ

§ 21. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЯ УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Элементарный вывод уравнения упругого режима фильтрации связан не только с введением гипотез о постоянстве горного давления, но и с пренебрежением анализа деформации. Поэтому различные типы локальной формулировки (18.4) гипотезы о постоянстве горного давления становятся эквивалентными, параметры пласта $m = m(\sigma^f, p)$ и $k = k(\sigma^f, p)$ оказываются функциями одного давления $m = m(p)$, $k = k(p)$. При этом необходимо либо определить фигурирующие в этих связях коэффициенты по натурным исследованиям пласта, либо находить их в лабораторных опытах, моделирующих пластовые условия.

Большие снижения (увеличения) пластового давления происходят при одновременном уменьшении (увеличении) проницаемости пласта, в условиях нелинейной зависимости пористости пласта и параметров насыщающей пласт жидкости от давления (см. § 19). Поэтому часто возникает необходимость соответствующего обобщения линейного уравнения пьезопроводности (18.8). Ограничимся анализом обратных эффектов, будем рассматривать движения жидкости и газа в глубинных пластах в условиях *нелинейно-упругого* режима фильтрации.

Уравнение движения жидкости будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{\mu}{k} m (w_i - u_i). \tag{21.1}$$

Поскольку изменение порового давления и фиктивного направления — величины одного порядка, в *слабо сцементированных средах* ($\varepsilon \ll 1$) деформации переупаковки будут гораздо больше деформации гидростатического расширения зерен. Тогда в уравнениях неразрывности можно пренебречь изменениями плотностей фаз

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-m) + \frac{\partial}{\partial x_i}(1-m)u_i = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} m w_i = 0. \tag{21.2}$$

Суммирование этих уравнений приводит к соотношению $\operatorname{div} \vec{u} = -\operatorname{div} m(\vec{w} - \vec{u})$, подстановка в которое связи (21.1) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \tag{21.2a}$$

В условиях нелинейных, но малых деформаций первое из уравнений (21.2) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial m}{\partial t} \approx (1 - m_0) \frac{\partial e}{\partial t}, \quad \frac{\partial e}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{u},$$

и уравнение (21.2) принимает свой окончательный вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{21.3}$$

В сцементированных средах деформации переупаковки твердых частиц будут по своей величине сближаться с деформациями изменения объема частиц. Однако при этом можно пренебрегать скоростью перемещения твердых частиц (по сравнению со скоростью жидкости) всюду, кроме уравнений неразрывности (см. § 18). Тогда из уравнения движения (21.1) и уравнения неразрывности для жидкости (21.2) следует

$$\frac{\partial m \rho_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{k \rho_2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{21.4}$$

Как видно, уравнение (21.4) отличается от (21.3) только тем, что в нем учитывается изменение плотности жидкости с давлением. Формальное внесение этого эффекта в уравнение (21.3) также возможно, и оно мало повлияет на решения, поскольку в слабо сцементированных средах в условиях постоянства горного давления зависимость пористости от порового давления будет преобладать. В связи с этим предположим, как это и делается обычно в неявном виде, что для любой степени сцементированности глубинных насыщенных коллекторов справедливо уравнение (21.4).

Измеренные лабораторным путем функции $m = m(p)$, $k = k(p)$, $\rho_2 = \rho_2(p)$ дополняют уравнение (21.4) при условии, что в лаборатории моделировались пластовые условия деформирования образца. В рассматриваемом случае деформации должны происходить из-за снижения порового давления при неизменных обжимающих образец нагрузках (см. § 19); это условие вызвано принятой здесь локальной формулировкой гипотезы о постоянстве горного давления, а также не требующей анализа нелинейных связей деформаций и напряжений (а также деформаций и пористости) элементарного вывода.

Фильтрация капельной жидкости при относительно небольшом перепаде давлений [7, 8]. Уравнение (21.4) дополняется при этом линейными соотношениями (18.20), (19.2), (19.5) и принимает вид

$$\Lambda_1 \left[1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}(p - p_0)\right] \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[1 + \alpha(p - p_0) \frac{\partial p}{\partial x_i}\right], \tag{21.5}$$

$$\Lambda_1 = \frac{m(p_0)}{K_{\text{ж}}} + \left(\frac{\partial m}{\partial p}\right)_{p_0} \equiv m_0 a_\rho + a_m,$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{\partial m}{\partial p}\,\frac{1}{K_ж}\right) + \left(\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}\right)_{p_0} + \frac{m}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_{p_0},$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{k}\,\frac{\partial k}{\partial p} + \frac{1}{K_ж} - \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial p}\right) = a_k + a_\rho - a_\mu.$$

Оценки показывают (см. § 19), что $\Lambda_1 \approx 10^{-4}\ ат^{-1}$, $\Lambda_2 \approx 10^{-8}\ ат^{-2}$. Поскольку рассматриваются такие фильтрационные потоки, в которых максимальное значение разности $(p - p_0)$ имеет порядок нескольких сотен атмосфер, то величиной $\Lambda_2 (p - p_0)/\Lambda_1$ можно по сравнению с единицей пренебречь.

Поэтому можно считать, что соответствующий процесс фильтрации в сжимаемых пористых средах будет описываться следующим нелинейным параболическим уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{[1 + \alpha (p - p_0)]\,\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\}, \tag{21.6}$$

где $\varkappa = \dfrac{k(p_0)}{\mu(p_0)\,\Lambda_1}$ — обычный коэффициент пьезопроводности [241].

В то же время, судя по имеющимся экспериментальным данным (см. § 19), $\alpha = (10^{-3} \div 10^{-4})\ ат^{-1}$, а поэтому величина $\alpha (p - p_0)$ может (например, в трещиноватых или глинистых коллекторах) достигать 0,1, а иногда и больших значений. В этих случаях следует пользоваться уравнением (21.5).

Для изотермической фильтрации в аналогичных условиях реального газа, уравнение состояния которого $\rho = p/zRT$, уравнение (21.4) принимает вид

$$(1 - Bp)\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{[1 + C (p - p_0)]\, p\, \frac{\partial p}{\partial x_i}\right\}, \tag{21.7}$$

$$B = \left(\frac{1}{z}\,\frac{\partial z}{\partial p} - \frac{1}{m}\,\frac{\partial m}{\partial p}\right)_{p_0}, \quad C = \left(\frac{1}{k}\,\frac{\partial k}{\partial p} - \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial p} - \frac{1}{z}\,\frac{\partial z}{\partial p}\right)_{p_0},$$

$$\varkappa = \frac{k_0}{m_0 \mu_0}.$$

Параметр $B = (1 \div 3) \cdot 10^{-4}\ ат^{-1}$. Поэтому для встречающихся на практике величин p коэффициент Bp будет настолько мал (по сравнению с единицей), что им можно пренебречь. Тогда уравнение (21.7) упрощается

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{[1 + C (p - p_0)]\, p \frac{\partial p}{\partial x_i}\right\}. \tag{21.8}$$

В недеформируемой пористой среде изотермическая *фильтрация идеального газа*, как это следует из уравнения (21.8), будет описываться нелинейным уравнением Л. С. Лейбензона [131]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\varkappa}{2}\,\frac{\partial^2 p^2}{\partial x_i\, \partial x_i}. \tag{21.9}$$

Аналогичные выкладки показывают, что *политропическая фильтрация идеального газа* (эффективное уравнение состояния $(p/\rho^n) = \text{const}$ — показатель политропы) описывается уравнением

$$\frac{\partial p^\nu}{\partial t} = \frac{\varkappa}{1+\nu}\frac{\partial^2 p^{1+\nu}}{\partial x_i\,\partial x_i}, \quad \nu = \frac{1}{n}. \tag{21.10}$$

При фильтрации в условиях **больших перепадов давлений** линейные соотношения (19.20), (20.2), (20.5) следует заменить на *экспоненциальные* (19.19), (20.1), (20.5). Тогда для *капельных жидкостей* уравнение (21.4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{\beta(p-p_0)} = \varkappa\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{e}^{\alpha(p-p_0)}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right), \tag{21.11}$$

$$\beta = a_m + a_\rho, \quad \alpha = a_k + a_\rho - a_\mu.$$

Если положить $\exp[\beta(p-p_0)] = \varphi$, $\gamma = \alpha/\beta$, то из уравнения (21.11) получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = D^2\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x_i\,\partial x_i}, \quad D^2 = \frac{\varkappa}{\alpha} = \frac{k_0}{m_0\mu_0\alpha}. \tag{21.12}$$

Таким образом, неустановившаяся фильтрация капельной жидкости в деформируемом пласте описывается уравнением (21.12), вполне аналогичным уравнению (21.10) политропической фильтрации газа в недеформируемом пласте.

При значении $\gamma = 1{,}0$ уравнение (21.10) переходит в обычное уравнение теплопроводности. Этот частный случай соответствует теории фильтрации сверхсжимаемой жидкости [140], предлагавшейся ранее для описания нестационарных процессов в напорных пластах.

Фильтрация *реального газа* в деформируемом пласте при экспоненциальных соотношениях описывается, как это следует из уравнения (21.4), следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[p\mathrm{e}^{\beta(p-p_0)}\right] = \varkappa\frac{\partial}{\partial x_i}\left[p\mathrm{e}^{\alpha(p-p_0)}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right], \tag{21.13}$$

где

$$\beta = a_m - a_z; \quad \alpha = a_k - a_z - a_\mu$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[p\mathrm{e}^{\beta(p-p_0)}\right] = \varkappa\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_i}\left[\frac{\alpha(p-1)}{\alpha^2}\mathrm{e}^{\alpha(p-p_0)}\right]. \tag{21.14}$$

Обобщая указанные частные случаи, введем в уравнение (21.4) вместо давления новую переменную функцию Л. С. Лейбензона

$$\mathscr{P} = \int\frac{k(p)\,\rho(p)}{\mu(p)}\,dp. \tag{21.15}$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\varkappa(p)}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2\mathscr{P}}{\partial x_i\,\partial x_i}, \tag{21.16}$$

$$\bar{\varkappa} = \frac{\bar{k}(p)}{\bar{\mu}(p)\,m(p)\,(a_\rho + a_m)}, \quad \varkappa = \frac{k_0}{\mu_0 m_0},$$

$$\bar{k}(p)=\frac{k(p)}{k_0},\quad m(p)=\frac{m(p)}{m_0},\quad \mu(p)=\frac{\mu(p)}{\mu_0},$$

$$a_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p},\qquad a_m=\frac{1}{m}\frac{dm}{\partial p}.$$

Уравнение (21.16) можно назвать обобщенным дифференциальным уравнением нелинейно-упругой фильтрации однородной жидкости.

В табл. 15 приведены значения $\varkappa$ и $\mathscr{P}$ для различных случаев фильтрации жидкости и газа.

Таблица 15

Характеристика свойства коллектора		Значение функции в уравнении (21.16)	Эффективное уравнение фильтрации
Капельные жидкости	Линейные связи	$\mathscr{P}=(1-\alpha p_0)p_0+\frac{1}{2}\alpha p^2$ $\bar{\varkappa}=\frac{[1+\alpha(p-p_0)]}{m_0\Lambda_1}$	$\Lambda_1\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k_0}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}[1+$ $+\alpha(p-p_0)]\frac{\partial p}{\partial x}$
	Экспоненциальные связи	$\mathscr{P}=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha(p-p_0)}$ $\bar{\varkappa}=\frac{1}{\beta}e^{(\alpha-\beta)(p-p_0)}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{k_0}{\mu_0 m_0\alpha}\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^2},\ \gamma=\frac{\alpha}{\beta},$ $\varphi=\exp[\beta(p-p_0)]$
Идеальный газ	Политропическая фильтрация (n — показатель политропы)	$\mathscr{P}=\frac{n}{n+1}p^{\frac{n+1}{n}}$ $\bar{\varkappa}=np$	$\frac{\partial p^\nu}{\partial t}=\frac{1}{1+\nu}\frac{k_0}{m_0\mu_0}\frac{\partial^2 p^{\nu+1}}{\partial x^2}$
Недеформируемый пласт	Изотермический процесс	$\mathscr{P}=\frac{1}{2}p^2$ $\bar{\varkappa}=p$	$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k_0}{2m_0\mu_0}\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2}$
Реальный газ, деформируемый пласт		$d\mathscr{P}=\frac{\bar{k}(p)\,p}{\bar{\mu}(p)\,z(p)}dp$ $\varkappa=\frac{\bar{k}(p)\,p}{\bar{m}(p)\,\bar{\mu}(p)}$	$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t}=\frac{k_0}{m_0\mu_0}\frac{\partial^2\mathscr{P}}{\partial x^2}$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений фильтрации смесей жидкостей и газов в деформируемых пористых глубинных пластах.

Пусть пористая среда насыщена двухфазной жидкостью — смесью двух взаимонерастворимых жидкостей, на поверхности раздела между которыми действуют капиллярные силы. В силу этого давле-

ние в первой фазе p_1 отличается от p_2 — давления во второй фазе на некоторую величину $p_k(S) = p_1 - p_2$, называемую капиллярным давлением, функцию объемной насыщенности S порового пространства первой фазой.

Горное давление Γ_{ij} в пористом коллекторе будет уравновешиваться напряжениями в скелете среды и давлениями p_1 и p_2 по предположению следующим образом:

$$\Gamma_{ij} = (1-m)\,\sigma_{ij} - m\mathrm{P}\delta_{ij}, \quad \mathrm{P} = p_1 S + p_2(1-S). \tag{21.17}$$

Здесь σ_{ij} — истинные напряжения в скелете среды; P — некоторое эффективное давление при двухфазном насыщении порового пространства.

Введем фиктивные напряжения σ^f_{ij};

$$\sigma^f_{ij} = (1-m)\,(\sigma_{ij} + \mathrm{P}\delta_{ij}), \quad \Gamma_{ij} = \sigma^f_{ij} - \mathrm{P}\delta_{ij}. \tag{21.18}$$

Ограничимся изучением постоянных нормальных компонент тензора суммарных напряжений: $\Gamma_{ij} = \mathrm{const}$, $i = j$ (см. § 18).

Вследствие постоянства суммарных напряжений (горного давления) изменения фиктивных напряжений равны изменениям давления P. Тогда в предположении о выполнении экспоненциальных связей (19.19) имеем

$$k(\mathrm{P}) = k(p_1)\exp\left(-a_{\text{к}}(1-S)\,p_{\text{к}}(S)\right) = k(p_2)\exp\left(a_{\text{к}}p_{\text{к}}(S)\,S\right),$$

$$m(P) = m(p_1)\exp\left(-a_m(1-S)\,p_k(S)\right) = m(p_2)\exp\left(a_m p_{\text{к}}(S)\,S\right). \tag{21.19}$$

Будем считать также, что плотность и вязкость жидкости, равно как и коэффициент сжимаемости и вязкости газа, зависят от давления согласно экспоненциальному закону. Для простоты будем предполагать, что относительные проницаемости $f_i(S)$ при деформации порового пространства меняются несущественно (введение соответствующей поправки — см. § 19, — как легко видеть, не меняет хода последующего анализа).

Тогда обобщенный закон Дарси можно записать в следующем виде:

$$\rho_1 \vec{w}_1 = -\frac{k_0\rho_1^0}{\mu_1^0} F_1(S)\,\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{e}^{\alpha_1(p_1-p_0)}, \tag{21.20}$$

$$F_1(S) = f_1(S)\,\mathrm{e}^{-a_k(1-S)\,p_k(S)}, \quad \alpha_1 = a_k + a_{\rho 1} - a_{\mu 1},$$

$$\rho_2 \vec{w}_2 = -\frac{k_0\rho_2^0}{\mu_2^0} F_2(S)\,\frac{1}{\alpha_2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{e}^{\alpha_2(p_2-p_0)},$$

$$F_2(S) = f_2(S)\,\mathrm{e}^{a_k S p_k(S)}, \quad \alpha_2 = a_k + a_{\rho 2} - a_{\mu 2}. \tag{21.21}$$

Здесь и ниже k_0, ρ_i^0, μ_i^0, m_0 — значения параметров при $p = p_0$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$m\rho_1 = m_0\rho_1^0\varphi_1(S)\exp[\beta_1(p_1 - p_0)],$$
$$\varphi_1(S) = \exp[-a_m(1-S)p_к(S)],\ \beta_1 = a_m + a_{ф1}, \tag{21.22}$$

$$m\rho_2 = m_0\rho_2^0\varphi_2(S)\exp[\beta_2(p_2 - p_0)],$$
$$\varphi_2(S) = \exp(a_m S p_к(S)],\ \beta_2 = a_m + a_{ф2}. \tag{21.23}$$

Таким образом, для учета двухфазности насыщения порового пространства глубинного деформируемого коллектора нужно ввести функции $F_1(S)$, $F_2(S)$, $\varphi(S)$, $\varphi_2(S)$, первые из которых являются обобщением фазовых проницаемостей.

Если теперь подставить выражения (21.20) — (21.23) в уравнения неразрывности для каждой из жидких фаз

$$\frac{\partial m\rho_1 S}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1\vec{w}_1) = 0,\quad \frac{\partial m\rho_2(1-S)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2\vec{w}_2) = 0, \tag{21.24}$$

то получим систему нелинейных уравнений, описывающих движения *двухфазной капельной жидкости* при упругокапиллярном режиме в деформируемой пористой среде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S\varphi_1(S)\,e^{\beta_1(p_1-p_0)}\right) = D_1^2\operatorname{div}\left(F_1(S)\operatorname{grad}e^{\alpha_1(p_1-p_0)}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((1-S)\varphi_2(S)\,e^{\beta_2(p_2-p_0)}\right) = D_2^2\operatorname{div}\left(F_2(S)\operatorname{grad}e^{\alpha_2(p_2-p_0)}\right), \tag{21.25}$$

$$p_1 = p_2 + p_к(S),\ D_i^2 = k^0(\mu_i^0 m^0\alpha_i)^{-1}.$$

Могут существовать потоки двухфазной капельной жидкости, в котором одна из фаз вследствие ее малой насыщенности неподвижна (например, поток нефти в пласте с таким малым количеством пластовой воды, что в скважины вода не поступает; в этом случае о ее наличии удается судить только путем анализа отобранных образцов горной породы — так называемая погребенная вода). При этом расход одной из фаз равен нулю и будет выполняться условие сохранения массы этой фазы в элементарном макрообъеме, т. е.

$$(1-S)\varphi_2(S)\exp(\beta_2(p_2-p_0)) = A(x), \tag{21.26}$$

где $A(x)$ — функция, определяемая исходным распределением второй фазы в пористой среде.

Соотношение (21.26) связывает насыщенность S с давлением p_2, что, вообще говоря, позволяет исключить, например, давление p_1 из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S\varphi_1(S)\,e^{\beta_1(p_1-p_0)}\right) = D_1^2\operatorname{div}\left(F_2(S)\operatorname{grad}e^{\alpha_1(p_1-p_0)}\right). \tag{21.27}$$

Если теперь пренебречь капиллярным давлением, а также положить $\beta_1 = \beta_2$, то $\varphi_1(S) = \varphi_2(S) = 1$, а уравнение (21.27) переходит в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1^2\operatorname{div}\left(f_1\left(1-\frac{A}{u}\right)\operatorname{grad}u^\gamma\right),\quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta},\quad u = e^{\beta(p-p_0)}, \tag{21.28}$$

которое при $f_1 \approx \text{const}$ сводится к нелинейному уравнению упругого режима фильтрации однородной жидкости.

Уравнения фильтрации газожидкостной смеси (газ предполагается не растворимым в жидкости) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{S\varphi_1(S)\, p_1 e^{\beta_1 (p_1-p_0)}\right\} = D_1^2 \operatorname{div}\left\{F_1(S)\, p_1 \operatorname{grad} e^{\alpha_1 (p_1-p_0)}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(1-S)\varphi_2(S)\, e^{\beta_2 (p_2-p_0)}\right\} = D_2^2 \operatorname{div}\left\{F_2(S) \operatorname{grad} e^{\alpha_2 (p_2-p_0)}\right\}, \quad (21.29)$$

где $\alpha_1 = a_k - a_z - a_\mu$; $\beta_1 = a_m - a_z$.

Рассмотрим течения смеси с постоянным расходом газа, при которых

$$\operatorname{div}\left\{F_1(S)\, p_1 e^{\alpha_1 (p_1-p_0)} \operatorname{grad} p_1\right\} = 0. \quad (21.30)$$

Если расход газа равен нулю (выполняется условие остаточной газонасыщенности), то либо давление в газе p_1 постоянно (что позволяет, как и при фильтрации смеси капельных жидкостей, сделать вывод о потенциальности установившихся течений), либо относительная газопроницаемость равна нулю — $f(S) = 0$.

Неустановившееся движение жидкости при неподвижном газе будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(1-S)\varphi_2(S)\, e^{\beta_2 (p_2-p_0)}\right\} = D_2^2 \operatorname{div}\left\{F_2(S) \operatorname{grad} e^{\alpha_2 (p_2-p_0)}\right\} \quad (21.31)$$

при условии

$$S p_1 \varphi_1(S) \exp\left\{\beta_1 (p_1 - p_0)\right\} = A(x), \quad (21.32)$$

которое связывает переменные S и p.

Исследуем такие течения, в которых можно пренебречь капиллярным давлением, т. е. где $p_1 = p_2 = p$. Тогда условие (21.32) запишется в виде

$$S = A(x)\frac{1}{p} \exp\left\{-\beta_1 (p - p_0)\right\}. \quad (21.33)$$

Подстановка этого соотношения в уравнение (21.31) дает в результате

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{e^{\beta_2 (p-p_0)} - \frac{A(x)}{p} e^{(\beta_2-\beta_1)(p-p_0)}\right\} =$$

$$= D_2^2 \operatorname{div}\left\{f_2\left(\frac{A(x)}{p} e^{\beta_1 (p_0-p)}\right) \operatorname{grad} e^{\alpha_2 (p-p_0)}\right\}. \quad (21.34)$$

Уравнение (21.34) еще больше упрощается, если считать жидкость несжимаемой, а газ идеальным (т. е. $\beta_2 = \beta_1$). Наконец, уравнение нестационарной фильтрации в недеформируемой пористой среде с защемленными пузырьками идеального газа (например, в заводненных газосодержащих пластах) будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(p-A)}{p}\right) = \alpha_2 D_2^2 \operatorname{div}\left\{f_2\left(\frac{A}{p}\right) \operatorname{grad} p\right\}. \quad (21.35)$$

Таким образом, возмущение давления в такой среде распространяется так же, как при упругом режиме фильтрации со следующими характеристиками:

$$m\rho = m_0 \rho_2^0 \left(1 - \frac{A}{p}\right), \quad \frac{k\rho}{\mu} = \frac{k_0 \rho_2^0}{\mu} f_2\left(\frac{A}{p}\right). \quad (21.36)$$

Если защемленной оказалась жидкость, то распределение давления в газе будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\{S\varphi_1(S)\,p_1 e^{\beta_1(p_1-p_0)}\} = L_1^2 \operatorname{div}\{F_1(S)\,p_1 \operatorname{grade}^{\alpha_1(p_1-p_0)}\} \qquad (21.37)$$

$$(1-S)\,\varphi_2(S)\exp\{\beta_2(p_2-p_0)\} = A(x).$$

Если считать пласт и жидкость несжимаемыми, а газ идеальным, то уравнение (21.37) упростится

$$\frac{\partial}{\partial t}(Sp_1) = D_1^2 \operatorname{div}\{f_1(S)\,p_1 \operatorname{grad} p_1\}, \qquad (21.38)$$

где $S = 1 - A(x)$.

Отсюда видно, что при этих условиях капиллярные силы будут влиять на фильтрацию газа, а присутствие жидкости проявляется в уменьшении пористости и проницаемости по следующему закону:

$$m = m_0 S = m_0\{1 - A(x)\};\quad k = k_0 f_1(S) = k_0 f\{1 - A(x)\}. \qquad (21.39)$$

Течение *взаиморастворимых газожидкостных смесей* характеризуется тем, что в процессе движения изменяется компонентный состав фаз. Если течение достаточно медленно, то можно предположить наличие локального термодинамического равновесия газовой и жидкой фаз. Тогда для замыкания получающейся системы уравнений можно воспользоваться условиями равенства химических потенциалов фаз (см. примечание на стр. 35).

Если для рассматриваемого пласта существенны *нелокальные* эффекты, то необходимо использовать вместо условия (18.4) нелокальную формулировку (18.3) гипотезы о постоянстве компонент горного давления. Представим в этом случае пористость m в виде линейной функции $m = m_0\{1 + a(p - p_0) - b(\sigma^f - \sigma_0^f)\}$ отклонений порового давления p и эффективного давления σ^f в скелете горной породы от их стационарных значений p_0 и σ^f. Подстановка указанной связи в уравнение неразрывности для жидкости (21.2) при обычном пренебрежении скоростью смещения твердых частиц приводит при линейно-упругой фильтрации однородной жидкости к следующему уравнению:

$$(a_0 + a)\frac{\partial p}{\partial t} - b\frac{\partial \sigma^f}{\partial t} = \frac{k_0}{m_0\mu_0}\nabla^2 p + \frac{G}{m_0\rho_0}. \qquad (21.40)$$

Здесь введены также распределенные источники и стоки $G(x_i, t)$, иммитирующие работу скважин, $\sigma^f = -\theta^f = -(\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f + \sigma_{33}^f)/3$.

Если подставить в нелокальное условие (18.3) выбранный экспоненциальный вид функции влияния, то получим [170] (пользуясь

элементарностью рассмотрения) условие, связывающее эффективное и поровое давления, в виде

$$\sigma^f(x_i, t)+\frac{1}{\pi d^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\exp\left\{-\sum_{i=1,2}\frac{(x_i-x_i')^2}{d^2}\right\}p(x_i', t)\,dx_1\,dx_2=\Gamma(x_i) \quad (21.41)$$

или

$$\frac{\partial\sigma^f}{\partial t}=-\frac{1}{\pi d^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\exp\left\{-\sum_{i=1,2}\frac{(x_i-x_i')^2}{d^2}\right\}\frac{\partial p(x_i', t)}{\partial t}. \quad (21.42)$$

Для построения ряда решений системы уравнений (21.40), (21.42) удобно воспользоваться интегральным преобразованием Фурье [207], например,

$$\mathrm{P}=Lp=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int p(x_1, x_2; t)\,\mathrm{e}^{i\xi x_1+i\eta x_2}\,dx_1\,dx_2, \ldots$$

Тогда система уравнений в частных производных (21.40) и интегральная связь (21.42) перейдут в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}(1-\alpha)\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial t}-\omega\frac{d\Pi}{\partial t}+\varkappa(\xi^2+\eta^2)\,\mathrm{P}=X(\xi, \eta; t)\\ \frac{d\Pi}{\partial t}=-F(\xi, \eta)\frac{d\mathrm{P}}{\partial t}\end{aligned}\right\}, \quad (21.43)$$

где $F(\xi, \eta)=\exp\{-(\xi^2+\eta^2)\,d^2/4\}$, $\Pi=L\sigma^f$, $X=LG/(m\beta\rho_0)$,

$$\beta=a_\rho+a+b, \ \omega=b/\beta.$$

Если $\mathrm{P}_0=Lp\,(x_i, \ t=0)$, то общее решение системы (21.43) имеет вид

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}_0(\xi, \eta)\,\mathrm{e}^{-\varkappa t(\xi^2+\eta^2)A}+\int_0^t X(\xi, \eta, \tau)\,A\mathrm{e}^{-\varkappa(t-\tau)(\xi^2+\eta^2)A}\,d\tau,$$

$$\frac{1}{A}=1-\omega(1-F). \quad (21.44)$$

При рассмотрении осесимметричных течений условие (21.41) следует преобразовать.

Для этого нужно записать условие (21.41) в полярной системе координат (r, φ), а затем воспользоваться условием независимости локальных приращений $\sigma^f(r, t)$, $p(r, t)$ от полярного угла φ, что характерно для течений с *осевой симметрией*. Воспользовавшись известным равенством

$$\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{2r\rho}{d}\cos\varphi\right)d\varphi=2\pi I_0\left(\frac{2r\rho}{d^2}\right),$$

получим

$$\sigma^f(r, t) + \frac{2}{d^2}\int_0^\infty I_0\left(2\frac{r\rho}{d^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2+\rho^2}{d^2}\right)p(\rho, t)\,\rho\,d\rho = 0, \qquad (21.45)$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента.

Для построения конкретных решений в этом случае следует пользоваться интегральным преобразованием Ханкеля (см. § 24).

§ 22. ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Часто в горных породах, помимо *первичных* (межгранулярных), относительно мелких пор, имеются гораздо более крупные *вторичные поры, представленные отдельными или же соединенными между* собой трещинами и кавернами (более позднего механического или химического происхождения). Эти породы математически моделируются средой с *двойной пористостью* [8], у которой отдельно взятые первичные поры составляют сплошное пространство с пористостью m_1 и проницаемостью k_1, и аналогично вторичные поры — взаимопроникающие с первым пространство пористости m_2 и проницаемости k_2. Кроме того, допускается переток жидкости из одной системы пор в другую. Систему вторичных пор допустимо рассматривать как сплошную среду, если только их характерный микромасштаб (средняя длина трещин, диаметр каверны) гораздо меньше масштаба рассматриваемых областей движения [17, 18].

Для описания процесса *фильтрации* капельной жидкости в средах с двойной пористостью (в предположении о взаимонезависимости деформирования систем первичных и вторичных пор) было предложено [17] воспользоваться системой уравнений

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \varepsilon_2\frac{\partial p_2}{\partial t} = \varkappa(\varepsilon_1\nabla^2 p_1 + \nabla^2 p_2), \qquad (22.1)$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial p_2}{\partial t} = \varkappa\nabla^2 p_2 + \frac{p_2 - p_1}{\tau}, \qquad (22.2)$$

здесь p_1 и p_2, β и $\varepsilon_2\beta$, $\varepsilon_1 k$ и k — давления, эффективные сжимаемости в элементарном микрообъеме, проницаемости систем соответственно первичных и вторичных пор; $\varkappa = k/\mu\beta$; $\tau = \mu\beta/\alpha_0$; μ — вязкость жидкости; α_0 — мера интенсивности обмена жидкостью между системами трещин и блоков.

Эта система эквивалентна ранее предлагавшейся Л. И. Рубинштейном [193] системе уравнений распространения тепла в гетерогенной сплошной среде.

Для скоростей движения (фильтрации) жидкостей по каждой отдельной системе пор здесь использованы соотношения закона Дарси

$$W_1 = -\frac{\varepsilon_1 k}{\mu}\operatorname{grad} p_1, \quad W_2 = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p_2, \qquad (22.3)$$

а для интенсивности перетока жидкости q формула

$$q = \frac{\alpha_0}{\mu} \rho (p_2 - p_1). \tag{22.4}$$

Элементарный анализ силового взаимодействия систем первичных и вторичных пор показывает [7], что под внешним воздействием вначале деформируется система вторичных пор, причем истинное напряжение этой системы играет роль внешней нагрузки для системы первичных пор. Учет этого обстоятельства приводит [8] к несимметричной системе уравнений в отличие от (22.1)—(22.2). Более строгое рассмотрение требует развития теории деформирования сплошной среды с двойной пористостью.

Среды с двойной пористостью характеризуются, как правило, гораздо большей проницаемостью системы вторичных пор, т. е. условием $\varepsilon_1 \ll 1$. Следует различать *трещиноватые* пористые среды, в которых $\varepsilon_2 \ll 1$ — вторичные поры представлены системой трещин с пренебрежимо малым (по сравнению с первичными порами) суммарным объемом порового пространства, и *кавернозно-трещиноватые* пористые среды [1], в которых $\varepsilon_2 \approx 1$ — вторичные и первичные поры содержат объемы жидкости одного порядка.

В работах [17, 18] при рассмотрении фильтрации в трещиноватых пористых средах ($\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$) рекомендуется пренебрегать в системе (22.1)—(22.2) членами, умножаемыми на величины ε_1, ε_2, т. е. пользоваться упрощенной системой:

$$\varkappa \nabla^2 p_2 = \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad \varkappa \nabla^2 p_2 - \frac{p_1 - p_2}{\tau} = 0 \tag{22.5}$$

или же уравнением относительно давления p_2 в трещинах [2]

$$L p_2 = 0, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \varkappa\tau \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 - \varkappa \nabla^2. \tag{22.6}$$

Покажем, что система (22.5) эквивалентна системе (22.1)—(22.2), если характерные изменения давления в блоках и трещинах являются величинами одного порядка, т. е. если $p_1 = P\bar{p}_1$, $p_2 = P\bar{p}_2$, $\bar{p}_1 \sim \bar{p}_2 \approx 1$. Введем линейный масштаб L и масштаб времени T области, где изменяются давления в среде на характерную величину P. Тогда система уравнения (22.1)—(22.2) запишется в безразмерных переменных $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{x}_i$, $\bar{t}$ в виде

$$\begin{gathered} \frac{\varkappa T}{L^2} (\nabla^2 \bar{p}_2 + \varepsilon_1 \nabla^2 \bar{p}_1) = \varepsilon_2 \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial t}, \\ \frac{\varkappa T}{L^2} \nabla^2 \bar{p}_1 = \varepsilon_2 \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial t} - \frac{p_1 - p_2}{\tau} T. \end{gathered} \tag{22.7}$$

---

[1] В просто *кавернозных* пористых средах вторичные поры взаимоизолированы.

[2] Здесь по сравнению с [11, 17, 18] индексы 1, 2 обменялись местами как и в работе [324], теперь индекс 1 соответствует системе первичных пор (блоков), индекс 2 — вторичных (трещин).

Отсюда видно, что членами с коэффициентами ε_1, ε_2 можно пренебречь, если

$$\frac{\varkappa T}{L_1^2} \sim 1, \quad \frac{T}{\tau} \sim 1, \text{ т. е. } L \sim \sqrt{\varkappa\tau}, \tag{22.8}$$

причем первая оценка следует из первого из уравнений (22.7), а вторая из второго.

Рассмотрим теперь случай, когда изменения давления p_2 в трещинах гораздо больше изменений давления p_1 в блоках, т. е. когда $p_2 = P\bar{p}_2$, $p_1 = \varepsilon P\bar{p}_1$, $\varepsilon \ll 1$, $\bar{p}_1 \sim \bar{p}_2 \sim 1$. Пусть эти изменения давлений происходят в области масштабов L_0, T_0. Тогда система уравнений (22.1)—(22.2) представляется в виде

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial t} = \frac{\varkappa T_0}{L_0^2} (\nabla^2 \bar{p}_2 + \varepsilon_1 \varepsilon \nabla^2 \bar{p}_1),$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial t} = \frac{\varkappa T_0}{L_0^2} \nabla^2 p_2 + \frac{\bar{p}_2 - \varepsilon \bar{p}_1}{\tau} T_0 \tag{22.9}$$

и показывает, что при этом можно полагать $\varepsilon_1 = 0$, но нельзя пренебрегать членом, в коэффициент которого входит множитель ε_2. Если считать, что $\varepsilon_0 \approx \varepsilon_2$, то из уравнений (22.9) следует оценка масштабов T_0, L_0 области $p_1 \approx \varepsilon_2 p_2$:

$$\frac{\varkappa T_0}{L_0^2} \sim \varepsilon_2; \quad \frac{T_0}{\tau} \sim \varepsilon_2; \text{ т. е. } L_0 \sim \sqrt{\varkappa\tau}. \tag{22.10}$$

При этом уравнения (22.1)—(22.2) могут быть сведены к следующей разделяющейся системе:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \varkappa \nabla^2 p_2, \\ \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \varkappa \nabla^2 p_2 + \frac{p_2}{\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{22.11}$$

Наконец, если изменения давления p_1 в блоках гораздо больше изменений давления в трещинах ($p_1 \sim P\bar{p}_1$, $p_2 \sim \varepsilon P\bar{p}_2$, $\bar{p}_1 \sim \bar{p}_2 \sim 1$, $\varepsilon \ll 1$), то аналогично получаем систему безразмерных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa T_*}{L_*^2} (\varepsilon \nabla^2 \bar{p}_2 + \varepsilon_1 \nabla^2 \bar{p}_1) &= \varepsilon \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial t}, \\ \frac{\varkappa T_*}{L_*^2} \varepsilon_1 \nabla^2 p_1 - \frac{\varepsilon \bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\tau} T_* &= \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial t} \end{aligned} \tag{22.12}$$

и при $\varepsilon \approx \varepsilon_1$ соответствующую оценку масштабов L_*, T_*:

$$\frac{\varkappa T_*}{L_*^2} \sim \frac{1}{\varepsilon_1}; \quad \frac{T_*}{\tau} \sim 1, \text{ т. е. } L_* \sim \sqrt{\varepsilon_1 \varkappa \tau}. \tag{22.13}$$

Из системы (22.1)—(22.2) следует, что в области L_*, T_* справедлива следующая упрощенная также разделяющая система уравнений:

$$\varkappa(\nabla^2 p_2 + \varepsilon_1 \Delta^2 p_1) = \frac{\partial p_1}{\partial t},$$
$$\varkappa\varepsilon_1 \nabla^2 p_1 - \frac{p_1}{\tau} = \frac{\partial p_1}{\partial t}. \qquad (22.14)$$

Таким образом, в трещиновато-пористых средах в весьма малые интервалы времени $T_0 = \tau\varepsilon_2 \ll \tau$ фильтрация происходит согласно уравнениям (22.11) — давление p_2 в трещинах в области пласта $L_0 \sim L \sim \sqrt{\varkappa\tau}$ *перераспределяется согласно уравнению пьезопроводности* (со стоком в блоки) при эффективном коэффициенте пьезопроводности $\varkappa_0 = \frac{\varkappa}{\varepsilon_2} \gg \varkappa$. При описании этого начального быстрого изменения давления в системе вторичных пор можно пренебречь проницаемостью блоков.

Дальнейшие (при $T \sim \tau$) изменения давлений p_1, p_2 в той же области $L \sim \sqrt{\varkappa\tau}$ описываются системой уравнений (22.5) — по среде будет распространяться волна давления с запаздыванием τ (см. ниже) при коэффициенте $\varkappa$, определяемым сжимаемостью блоков и проницаемостью трещин [17]. Поскольку эта вторая волна распространяется в области L, T, где давление p_2 в трещинах уже возмущено, то начальное условие для уравнения (22.6) относительно p_2 изменится (по сравнению с начальным условием для системы (22.1)—(22.2) — например, с физически ясным условием покоя $p_1 = p_2 = p_0$) и определится как асимптотическое (при $t \to \infty$) решение системы (22.11). Факт как бы мгновенного изменения давления p_2 при использовании системы (22.5) отмечался в работе [74], а позднее — в [11].

В это же характерное время ($T \sim \tau$) в узкой зоне пласта $L_* \sim \sqrt{\varepsilon_1\varkappa\tau} \ll L$ около возмущающей границы будет существенно меняться давление p_1 в блоках согласно уравнениям (22.14), тогда как изменения давления p_2 в трещинах здесь менее существенны. Эффективный коэффициент пьезопроводности в системе (22.14): $\varkappa_* = \varkappa\varepsilon_1$ — определяется пористостью и проницаемостью блоков. Для области L, T этот процесс происходит как бы только на границе и можно приближенно считать его одномерным, происходящим вдоль оси x, направленной по нормали к границе. Если проинтегрировать второе уравнение (22.14) по x, то получим

$$\frac{\varepsilon_2 k}{\beta\mu}\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}\right]_0^\infty = \frac{\partial p_1^+}{\partial t} + \frac{p_1^+}{\tau}, \qquad (22.15)$$

где p_1^+ — среднее по области L_* давление в блоках.

При рассмотрении системы уравнений (22.5) в области L, T проницаемостью $\varepsilon_2 k$ пренебрегается. Этому соответствует условие $\varkappa_* = 0$ — уравнение (22.15) упрощается

$$\frac{\partial p_1^+}{\partial t} + \frac{p_1^+}{\tau} = 0. \tag{22.16}$$

Интегрирование уравнения (22.16) при начальном условии $p_1^+ (t = 0) = p_0$ и конечном $p_1^+ (t \to \infty) = P_0$ дает для промежуточного момента времени t соотношение

$$p_1^+ = P_0 + (p_0 - P_0) \exp(-t/\tau), \tag{22.17}$$

которое можно рассматривать как эффективное граничное условие для давления p_1 в блоках, вычисляемого для области L, T по системе (22.5) или же по уравнению

$$Lp_1 = 0, \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \varkappa\tau \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 - \varkappa \nabla^2, \tag{22.18}$$

совпадающему, как отмечалось [11], с уравнением (22.6) относительно давления p_2 в трещинах. Таким образом, различие хода изменения давлений p_1 и p_2 в области L, T заключается в различии граничных и начальных условий.

Соотношение (22.17) можно получить из закона сохранения для системы (22.5), как это было выполнено для математически аналогичных задач в работах [25, 157]— см. также [74], и формально — из уравнения (22.18) — см. [18] и исправление [11]. Однако эффективное уравнение для давления p_2 имеет тот же вид, что и (22.18), а потому исследование одного уравнения $Lp = 0$ *недостаточно* для нахождения правильного ответа — система (22.5) не эквивалентна в отдельности уравнению (22.18) или (22.6). В самом деле, как показано в работе [18], применение закона сохранения к уравнению $Lp = 0$ (на данном этапе не будем уточнять, относительно какого давления составлено это уравнение), т. е. интегрирование его по области $-h \leqslant x \leqslant h$, $0 \leqslant t \leqslant T$ приводит к равенству

$$\int_{-h}^{h} \{p(x, T) - p(x, 0)\}\, dx - \int_0^T \left\{ \varkappa\tau \frac{\partial^2 p}{\partial x\, \partial t} - \varkappa \frac{\partial p}{\partial x} \right\}_{x=-h}^{x=+h} dt = 0, \tag{22.19}$$

которое в обычном предположении об ограниченности функции $p(x, t)$ при $h \to 0$, непрерывности функций во времени и о произвольном выборе интервала T сводится к уравнению

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right] + \left[\frac{\partial p}{\partial n}\right] = 0 \tag{22.20}$$

относительно величины скачка нормальной производной у границы. Если провести ту же операцию интегрирования, предварительно умножив уравнение $Lp = 0$ на x, то аналогично получится уравнение относительно величины разрыва самого давления:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} [p] + [p] = 0. \tag{22.21}$$

Если теперь формально проинтегрировать [18] уравнения (22.20) и (22.21), то результатом будут соотношения, определяющие интенсивность затухания первоначально возникшего разрыва $[p_0]$ и $[\partial p/\partial n]_0$ во времени:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]=\left[\frac{\partial p}{\partial n}\right]_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad [p]=[p_0]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \tag{22.22}$$

Чтобы решить вопрос, для какого именно давления (p_1 или p_2) справедливы соотношения (22.22), необходимо исследовать на разрыве связь давлений p_1 и p_2, дополняющую уравнение (22.6) или (22.18). В самом деле, применяя ту же операцию интегрирования к первому из уравнений (22.5), получим

$$\left[\frac{\partial p_2}{\partial n}\right]=0. \tag{22.23}$$

Поэтому уравнение (22.20) относительно давления p_2 в трещинах вырождается — оба его слагаемых в отдельности тождественно равны нулю, т. е. скачки производной от давления в трещинах как при обычных процессах теплопроводности размываются мгновенно. Умножая предварительно это уравнение на x, получим

$$[p_2]=0, \tag{22.23а}$$

т. е. скачки самого давления в трещинах также мгновенно размываются. В то же время уравнение

$$\tau\frac{\partial p_1}{\partial t}+p_1=p_2,$$

как нетрудно видеть, именно в силу (22.23)—(22.23а) приводит к соотношениям (22.22) для давления в блоках p_1.

Из возможных физически оправданных постановок краевых задач предпочтение, по-видимому, надо отдать построению решений для давления p_2 в трещинах при учете их сжимаемости $\varepsilon_2\beta\neq 0$. Действительно, именно градиент давления p_2 определяет внешний приток жидкости в среду, а сохранение сжимаемости $\varepsilon_2\beta\neq 0$ позволяет не менять физически понятных начальных условий на асимптотику решений второго из уравнений (22.11). Более того, именно эта эффективная система уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p_1}{\partial t}+\varepsilon_2\frac{\partial p_2}{\partial t}=\varkappa\nabla^2 p_2,\\ &\varepsilon_2\frac{\partial p_2}{\partial t}=\varkappa\nabla^2 p_2-\frac{p_2-p_1}{\tau}\end{aligned} \tag{22.24}$$

описывает при конечных значениях параметра ε_2 фильтрацию однородной капельной жидкости в кавернозно-трещиноватых пористых средах.

Фильтрация газа в трещиновато-пористых средах рассматривалась в работе [68], где для идеального газа интенсивность перетока между системами вторичных и первичных пор задавалась в виде линейной формулы относительно перепада квадратов давления

$$q=\frac{\alpha_0\rho_0}{\mu p_0}(p_1^2-p_2^2), \tag{22.25}$$

а движение в каждой из систем происходило по обычным законам изотермической фильтрации газа. Тогда эффективная система уравнений, согласно [68], имеет вид

$$p_2^2 = p_1^2 + \frac{\eta}{\varkappa_0}\frac{\partial p_1}{\partial t},\ p_1^2 = p_2^2 - \eta\nabla^2 p_2^2,$$
$$\varkappa_0 = \frac{k}{2m_1\mu};\quad \eta = \frac{k}{2\alpha}. \tag{22.26}$$

Соответственно для кавернозных трещиновато-пористых сред система (22.26) должна быть модифицирована к виду

$$p_2^2 = p_1^2 + \frac{\eta}{\varkappa_0}\frac{\partial p_1}{\partial t};\quad p_1^2 = p_2^2 + \varepsilon_2\frac{\eta}{\varkappa_0}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \eta\nabla^2 p_2^2. \tag{22.27}$$

Попытка построения системы уравнений, описывающей фильтрацию газа в трещиновато-пористых коллекторах, была предпринята Гуднайтом, Фаттом и Клыковым [1]. Однако вместо формулы (22.25) ими задавался физически неоправданный линейный относительно перепада самих давлений закон: $q \approx p_1 - p_2$. В статье [12] соотношение (22.25) было обобщено на случай реального газа

$$q \sim \{\mathscr{L}(p_1) - \mathscr{L}(p_2)\},\quad \mathscr{L}(p_к) = \int_0^p \rho(p)\,dp. \tag{22.28}$$

Там же имеются предложения по поводу построения системы уравнений фильтрации многофазной жидкости в трещиноватых пористых средах [12].

Уравнения фильтрации однородной жидкости в средах с двойной пористостью при учете *нелинейно-упругих эффектов* выписывались впервые в книге [8]. Если принять предположение об экспоненциальных связях проницаемости и пористости обеих систем пор с соответствующим давлением

$$k_i = k_{0i}e^{-a_{ki}(p_0 - p_i)},\quad m_i = m_{0i}e^{-a_{mi}(p_0 - p_i)}$$

и аналогичное предположение относительно плотности и вязкости жидкости, то для интенсивности перетока q можно предположить [53] формулу

$$q = \frac{A(p)}{\mu_0}\frac{1}{\alpha_1}\{e^{-\alpha_1(p_0 - p_1)} - e^{-\alpha_1(p_0 - p_2)}\}, \tag{22.29}$$

где $\alpha_1 = a_{k1} + a_\rho - a_\mu$.

Выражение (22.29) учитывает тот факт, что сопротивление потоку оказывает система пор (блоков). Введем обозначения

$$u_2 = e^{-\alpha_2(p_0 - p_2)},\qquad u_1 = e^{-\alpha_1(p_0 - p_1)},\qquad \alpha_2 = a_{k2} + a_\rho - a_\mu,$$

[1] R. G. Goodknight, W. A. Klikoff, J. H. Fatt. Non-steady Slate Fluid Flow and Diffusion in Porous Media Containing Dead — End Pore Volume. J. of Phys Chem, vol 64, No. 9, September, 1960.

тогда уравнения фильтрации будут иметь вид [1]

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_2\gamma_2\frac{\partial u_2^{1/\gamma_2}}{\partial t}-n\varkappa\nabla^2u_2-\frac{1}{\tau}(u_1-u_2^n)=0,\\
&\frac{\partial u_1^{1/\gamma_2}}{\partial t}-\varepsilon_1\varkappa\nabla^2u_1+\frac{1}{\tau}(u_1-u_2^n)=0,
\end{aligned}\right\} \tag{22.30}$$

$$n=\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\quad \gamma_1=\frac{\alpha_1}{a_{m1}+a_\rho},\quad \gamma_2=\frac{\alpha_2}{a_{m2}+a_\rho},\quad \varepsilon_2=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{m_{02}}{m_{01}},$$

$$\varepsilon_1=\frac{k_{01}}{k_{02}},\quad \varkappa=\frac{k_{02}}{\mu_0 m_{02}(a_{m1}+a_\rho)},\quad \tau=\frac{\mu_0 m(a_{m1}+a_\rho)}{A}.$$

В дальнейшем будем считать, что $A(p) = \text{const}$.

Пренебрегая проницаемостью блоков по сравнению с проницаемостью трещин (что оправдано вдали от возмущающих границ), получим систему

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_2\gamma_2\frac{\partial u_2^{1/\gamma_2}}{\partial t}-n\varkappa\nabla^2u_2-\frac{1}{\tau}(u_1-u_2^n)=0\\
&\gamma_1\frac{\partial u_1^{1/\gamma_1}}{\partial t}+\frac{1}{\tau}(u_1-u_2^n)=0
\end{aligned}\right\}. \tag{22.31}$$

---

[1] Э. А. Авакян, А. Т. Горбунов, В. Н. Николаевский. Нелинейно-упругий режим фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах. В кн. «Теория и практика добычи нефти». Ежегодник, М., изд-во «Недра», 1968.

Глава VI

ОСНОВНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЯ

§ 23. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Стационарная фильтрация жидкости или газа описывается — см. уравнение (21.16) — уравнением Лапласа относительно соответствующей (см. табл. 15) функции Лейбензона:

$$\nabla^2 \mathscr{P} = 0. \tag{23.1}$$

До самого последнего времени при изучении стационарных течений, как правило, пользовались предположением о независимости параметров пласта, а также жидкости и газа от давления. Однако отмеченные выше упругие свойства среды, а также жидкости и реального газа сказываются на характере установившейся фильтрации.

Решая уравнение (23.1) для плоско-радиальной стационарной фильтрации, получим

$$G = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0} \frac{\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_с}{\ln (R_к / r_с)} = K \frac{\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_с}{\ln (R_к / r_с)},$$
$$\mathscr{P}_к = \int_{p_*}^{p_к} \frac{k(p)\,\rho(p)\,\mu_0}{k \rho_0 \mu(p)}\, dp + \mathscr{P}_0, \quad \mathscr{P}_с = \int_{p_*}^{p_с} \frac{k(p)\,\rho(p)\,\mu_0}{k \rho_0 \mu(p)}\, dp + \mathscr{P}_0, \tag{23.2}$$

где $\mathscr{P}_0 = \mathscr{P}(p_0)$; p_0 — некоторое стандартное (например, начальное давление отсчета); h — мощность пласта; R_k, $r_с$ — внешняя и внутренняя круговые границы области движения (R_k — контур питания; $r_с$ — радиус скважины), $p_k = p(R_k)$ — текущее пластовое давление; $p_с = p(r_с)$ — давление на забое скважины; G — массовый расход (дебит скважины); k_0, $\mu_0 \rho_0$ — значения параметров при $p = p_0$.

Функцию $\mathscr{P}$ можно вычислить при задании аналитического вида зависимостей $k(p)$, $\mu(p)$, $\rho(p)$.

Экспоненциальной зависимости параметров пласта и капельной жидкости от давления соответствует связь $\mathscr{P} = (\lambda/\alpha \exp(-\alpha\Delta p)$. При этом формула (23.2) принимает вид

$$G = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0} \frac{e^{-\alpha(p_0-p_к)} - e^{-\alpha(p_0-p_c)}}{\alpha \ln(R_к/r_c)}. \tag{23.3}$$

Здесь предполагается, что текущее пластовое давление p_k отличается от начального p_0. Если же в качестве давления отсчета брать само текущее давление, то выражение (23.3) упрощается

$$G = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0} \frac{1 - e^{-\alpha(p_0-p_c)}}{\alpha \ln(R_к/r_c)}. \tag{23.4}$$

При стационарной фильтрации жидкости при плоско-параллельном движении (приток к галерее) дебит жидкости определяется по формуле

$$G = F \frac{k_0 \rho_0}{\mu_0} \frac{e^{-\alpha(p_0-p_к)} - e^{-\alpha(p_0-p_c)}}{\alpha L}, \tag{23.5}$$

где L — длина пласта (расстояние между галереями); F — поперечное сечение пласта.

Соответственно при $p_0 = p_к$ получаем

$$G = F \frac{k_0 \rho_0}{\mu_0} \frac{1 - e^{-\alpha(p_0-p_c)}}{\alpha \ln(R_к/r_c)}. \tag{23.6}$$

Формулы (23.3)—(23.6) соответствуют процессу стационарной фильтрации упругой жидкости в упругой (деформируемой) пористой или трещиноватой среде. Когда на проницаемость пласта, а также на плотность и вязкость жидкости не влияет давление (т. е. когда $\alpha = 0$), из этих зависимостей получаются обычные формулы стационарного дебита скважины. Для этого достаточно раскрыть получающиеся в этих формулах неопределенности по правилу Лопиталя, что сразу приведет к известным линейным формулам Дюпюи и Дарси.

Рассмотрим теперь распределение давления в пласте при фильтрации в нем жидкости в условиях плоско-радиальной и плоско-параллельного движений, которое описывается следующими формулами:

$$\frac{\ln r/r_c}{\ln R_к/r_c} = \frac{e^{-\alpha(p_0-p_к)} - e^{-\alpha(p_0-p)}}{e^{-\alpha(p_0-p_к)} - e^{-\alpha(p_0-p_c)}}; \quad \frac{x}{L} = \frac{e^{-\alpha(p_0-p_к)} - e^{-\alpha(p_0-p)}}{e^{-\alpha(p_0-p_к)} - e^{-\alpha(p_0-p_c)}}, \tag{23.7}$$

где p — давление на расстоянии r от оси скважины или на расстоянии x от начала галереи.

Случай $\alpha = 0$ соответствует обычной линейной формуле Дюпюи. При задании функции Лейбензона в виде $\mathscr{P} = [1 - \alpha(p_0 - p)^n (1/n\alpha)$ для осесимметричного движения имеем

$$G = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0} \frac{[1-\alpha(p_0-p_к)]^n - [1-\alpha(p_0-p_c)]^n}{\alpha n \ln(R_к/r_c)} \tag{23.8}$$

и для плоско-параллельного движения

$$G = F\frac{k_0\rho_0}{\mu_0}\,\frac{[1-\alpha(p_0-p_к)]^n - [1-\alpha(p_0-p_c)]^n}{\alpha n L}. \qquad (23.9)$$

Из зависимостей (23.8)—(23.9) при $n = 2$ получаются формулы, соответствующие линейным соотношениям (см. табл. 15) параметров пласта и свойств жидкости от давления [7]. При $n = 3$ из зависимостей (23.8)—(23.9) имеем формулу, предложенную Д. Н. Кузьмичевым [114], при $n = 4$ — формулу, предложенную Ю. П. Желтовым [67].

При стационарных течениях реальных газов в упругих (деформируемых) средах следует учитывать зависимости свойств пласта (проницаемости) от давления, а также реальных свойств газа (вязкость и коэффициент сжимаемости) от давления.

В предположении об экспоненциальном характере зависимостей параметров пласта и свойств газа от давления формула для стационарного объемного дебита газовой скважины при осесимметричном движении будет

$$Q = \frac{2\pi k_0 h}{z_0\mu_0}\,\frac{(\alpha p_к - 1) - (\alpha p_c - 1)\,e^{\alpha(p_c-p_к)}}{\alpha^2 \ln(R_к/r_c)}. \qquad (23.10)$$

Стационарный объемный дебит газовой скважины в предположении о линейной зависимости параметров пласта и газа от давления (т. е. $n = 2$) соответственно будет равен

$$Q = \frac{\pi k_0 h}{\mu_0 z_0}\,\frac{(p_к^2 - p_c^2)}{\ln(R_к/r_c)}\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\frac{p_c^2}{p_к + p_c} - \alpha\frac{p_к}{3}\right). \qquad (23.11)$$

Исследуем влияние параметра α на стационарный плоско-радиальный поток по формуле (23.11). Введем следующие обозначения:

$$Q^* = \frac{3Q\mu_0 z_0}{\pi k_0 h p_к^2}\ln\frac{R_к}{R_c}, \quad p_* = \frac{p_c}{p_к},$$

при этом формулу (23.11) можно записать так:

$$Q^* = (1 - p_*^2)\,[3(1 + p_*) + \alpha p_к (2p_*^2 - p_* - 1)]. \qquad (23.12)$$

Сравним теперь значения безразмерного дебита Q^* при различных значениях p_* и безразмерного параметра $\alpha p_к$ (табл. 16).

Таблица 16

$\alpha p_к$	$p_* = p_c/p_к$				
	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1
	0,57	1,53	2,25	2,73	2,97
1,0	0,29	0,81	1,25	1,61	1,89
2,0	0,01	0,09	0,25	0,49	0,81

Как видно из табл. 16, влияние реальных свойств пласта и газа на величину дебита Q^* довольно значительно.

Рассмотрим задачу о стационарном потоке газированной жидкости в сжимаемом пласте. На первый взгляд может показаться, что учитывать сжимаемость пласта в этом случае не следует, так как сжимаемость газа на несколько порядков превосходит сжимаемость пористой среды. На самом деле, как это будет показано ниже, во многих случаях такой учет необходим, поскольку при сжатии пласта изменяется его проницаемость.

Установившееся движение газированной жидкости описывается решениями системы уравнений, неразрывности для жидкости и газа при учете двухкомпонентного состава только жидкости

$$\operatorname{div}(\rho_1 \vec{w}_1) = 0, \tag{23.13}$$

$$\operatorname{div}\left[\frac{\vec{w}_2 p}{RTz(p)} + \sigma(p)\, p \vec{w}_1\right] = 0, \tag{23.14}$$

здесь $\sigma(p)$ — масса газа, растворяющегося в единице объема жидкости при повышении давления на 1 *ат*; ρ — плотность жидкости.

Первый член в квадратных скобках в уравнении (23.14) определяет массовую скорость газа, находящегося в свободном состоянии, а второй член — массовую скорость газа, растворенного в жидкости. При давлении p, равном или большем некоторого давления насыщения p_+, весь газ в поровом пространстве оказывается растворенным в жидкости, т. е. при $p \geqslant p_+$ имеют место следующие соотношения: $S = 1$; $f_1(S, p) = 1$; $f_2(S, p) = 0$, $\vec{w}_2 = 0$. Положим, что при $p \geqslant p_+$ имеет место равенство: $\sigma(p) = \sigma(p_+)/p$. Это значит, что при любых давлениях выше p_+ количество газа, растворенного в жидкости, остается постоянным.

Уравнение (23.13) можно записать также следующим образом:

$$\operatorname{div}\left\{\left(p\sigma(p) + p\frac{f_2(S, p)}{f_1(S, p)}\frac{\mu_1(p)}{\mu_2(p)}\right)\vec{w}\right\} = 0. \tag{23.15}$$

Воспользуемся теперь методом С. А. Христиановича [220], а именно, преобразуем уравнение (23.15)

$$\rho \vec{w}_1 \operatorname{grad}\left\{\frac{p\sigma(p)}{\rho} + \frac{f_2(S, p)}{f_1(S, p)}\frac{\mu_1(p)}{\mu_2(p)}\right\} = 0. \tag{23.16}$$

Это означает, что величина

$$\Gamma = \frac{p\sigma(p)}{\rho} + \frac{p}{\rho}\frac{f_2(S, p)}{f_1(S, p)}\frac{\mu_1(p)}{\mu_2(p)}$$

постоянная вдоль линии тока.

Если на какой-нибудь замкнутой кривой, ограничивающей рассматриваемую область пласта, величина p не изменяется (например, $p = p_+$), то $\Gamma = \text{const}$ в данной области. Внутри этой области соотношение $\Gamma = \text{const}$ является уравнением, связывающим между собой насыщенность S и давление p.

Тогда уравнение для движения жидкости можно записать следующим образом:

$$p_1 \vec{w}_1 = -\frac{k(p_+)\rho(p_+)}{\mu(p)} e^{\alpha_j (p-p_+)} f_1(S(p), p) \operatorname{grad} p, \tag{23.17}$$

где $\alpha_j = \alpha_1$ при $p > p_+$ и $\alpha_j = \alpha_2$ при $p < p_+$. Различные значения параметра α справа и слева от точки отражают тот факт, что свойства жидкости (скорость

изменения вязкости и плотности) резко изменяются с началом выделения газа (см. § 20).

Соотношение (23.17) можно представить в виде

$$\rho\vec{w}_1 = -\frac{k(p_+)\rho(p_+)}{\mu(p_+)}\operatorname{grad}(\mathscr{P}),\quad \mathscr{P}(p) = \int e^{\alpha_j(p-p_+)} f_1(S(p),\ p)\,dp. \qquad (23.18)$$

Подставляя соотношение (23.18) в уравнение неразрывности, получим что функция $\mathscr{P}$ удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области пласта (при $p > p_+$, $p \leqslant p_+$).

Легко выписать формулу для величины притока массы жидкости к скважине

$$G = \frac{2\pi k(p_+)\rho(p_+)}{\mu(p_+)\ln(R_к/r_c)} \int_{p_c}^{p_0} e^{\alpha_j(p-p_+)} f_1(S(p),\ p)\cdot dp, \qquad (23.19)$$

где Q — дебит скважины; p_c, p_0 — давление соответственно на стенке скважины ($r = R_c$) и на контуре питания ($r = R_к$).

Формулы установившегося радиального притока однородной жидкости G_1 к линии разгазирования R_+ и газированной жидкости G_2 к стенке скважины R_c имеют вид

$$G_1 = \frac{2\pi k_0\rho_0}{\mu_0}\frac{1-e^{-\alpha(p_0-p_+)}}{\alpha\ln(R_к/R_+)},\qquad G_2 = \frac{2\pi k_+ h}{\ln(R_+/r_c)}(\mathscr{P}_+ - \mathscr{P}_c). \qquad (23.20)$$

Вследствие неразрывности потока $G_1 = G_2 = G$. Приравняв соотношения (23.20) и воспользовавшись правилом производных пропорций, имеем

$$G = \frac{2\pi k_0\rho_0 h\left(1-e^{-\alpha(p_0-p_+)}\right)\dfrac{1}{\mu_0\alpha} + 2\pi k_+ h(\mathscr{P}_+ - \mathscr{P}_c)}{\ln\dfrac{R_к}{R_+} + \ln\dfrac{R_+}{r_c}}, \qquad (23.21)$$

где k_0 и $k_+ = k_0\exp\{-a_k(p_0-p_+)\}$ — проницаемости пласта при пластовых давлениях соответственно p_0 и p_+.

Исследуем *установившиеся движения капельной двухфазной жидкости*, при которых капиллярными силами из-за высоких значений градиентов фазовых давлений можно пренебречь, т. е.

$$\begin{aligned}\rho_1\vec{w}_1 &= -\frac{k_0\rho_1^0}{\mu_2^0}f_1(S)\,e^{+\alpha_1(p-p_0)}\operatorname{grad}p,\\ \rho_2\vec{w}_2 &= -\frac{k_0\rho_2^0}{\mu_2^0}f_2(S)\,e^{\alpha_2(p-p_0)}\operatorname{grad}p.\end{aligned} \qquad (23.22)$$

Отсюда

$$\rho_1\vec{w}_1 = \frac{\rho_1^0\mu_2^0}{\rho_2^0\mu_1^0}\frac{f_1(S)}{f_2(S)}e^{(\alpha_1-\alpha_2)(p-p_0)}\rho_2\vec{w}_2. \qquad (23.23)$$

Подставляя это соотношение в уравнение неразрывности для первой фазы $\operatorname{div}(\rho_1\vec{w}_1) = 0$, получим

$$\operatorname{div}\left\{\frac{\rho_1^0\mu_2^0}{\rho_2^0\mu_1^0}\frac{f_1(S)}{f_2(S)}e^{(\alpha_1-\alpha_2)(p-p_0)}\rho_2\vec{w}_2\right\} = 0. \qquad (23.24)$$

Но так как $\operatorname{div}(\rho_2 \vec{w}_2) = 0$, то имеет место соотношение

$$\rho_2 \vec{w} \operatorname{grad} \left\{ \frac{\rho_1^0 \mu_2^0}{\rho_2^0 \mu_1^0} \frac{f_1(S)}{f_2(S)} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)(p - p_0)} \right\} = 0. \tag{23.25}$$

Это означает, что величина

$$W = \frac{\rho_1^0 \mu_2^0}{\rho_2^0 \mu_1^0} \frac{f_1(S)}{f_2(S)} e^{(\alpha_1 - \alpha_2)(p - p_0)} = \frac{\rho_1 |\vec{w}_1|}{\rho_2 |\vec{w}_2|} \tag{23.26}$$

постоянна вдоль линий тока. Если на какой-нибудь замкнутой кривой величина W не изменяется, то она будет постоянна по всей области, расположенной внутри указанной кривой.

Из практики добычи нефти известны многочисленные случаи, когда скважины давали в течение длительного времени постоянный дебит с постоянной обводненностью W. В условиях высоких градиентов давления наличие такого притока говорит о возможности существования рассматриваемых установившихся двухфазных течений. Теория таких течений для недеформируемых пористых сред была рассмотрена М. Маскетом [141].

Соотношение $W = \text{const}$ позволяет определить S по известному p, т. е. допустимо следующее представление:

$$\rho_2 \vec{w}_2 = -\frac{k_0 \rho_2^0}{\mu_2^0} f_2(S(p)) e^{\alpha_2 (p - p_0)} \operatorname{grad} p = \frac{k_0 \rho_2^0}{\mu_2^0} \operatorname{grad} \mathscr{P}. \tag{23.27}$$

Таким образом, функция $\mathscr{P}$ будет удовлетворять уравнению Лапласа во всей области, где $W = \text{const}$, $d\mathscr{P} = f_2(S(p)) \exp\{\alpha_2 (p - p_0)\} dp$.

Приток второй фазы к скважине будет определяться формулой

$$G = \frac{2\pi k_0 \rho_2^0}{\mu_2^0 \ln(R_к / r_c)} \int_{p_c}^{p_0} f_2(S(p)) e^{\alpha_2 (p - p_0)} dp. \tag{23.28}$$

Теперь перейдем к рассмотрению установившихся течений, при которых существенны *капиллярные силы*, в частности, исследуем задачу о распределении остаточной насыщенности вытесняемой фазы.

Насыщенность, например, второй фазы считается остаточной, если поток ее равен нулю [36]. В рассматриваемом случае это условие имеет вид

$$\rho_2 \vec{w}_2 = -\frac{k(p_2) \rho_2(p_2)}{\mu_2(p_2)} f_2(S) e^{\alpha_к p_c(S) S} \operatorname{grad} p_2 = 0, \tag{23.29}$$

что может быть при $\operatorname{grad} p_2 = 0$, $f_2(S) \neq 0$ или же при $f_2(S) = 0$. Первое условие соответствует наличию в пористой среде заполненной

второй фазой разветвленной системы каналов, в которой устанавливается постоянное давление p_2. Так как давление p_1 отличается от p_2 на величину капиллярного скачка, то перепад давлений в подвижной фазе предопределяется капиллярными силами.

Итак, пусть $p_2 = p_1 - p_k(S) = \text{const}$. Тогда

$$\rho_1 \vec{w} = -\frac{k_0 \rho_1}{\mu_1^0} F_1(S)\, e^{\alpha_1 (p_2 - p_к(S) - p_0)} \frac{dp_к}{dS} \operatorname{grad} S = -\frac{k_0 \rho_1^0}{\mu_1^0} \psi(S). \quad (23.30)$$

Подстановка соотношения (23.30) в уравнение неразрывности показывает, что при установившемся движении функция $v(S)$, как и для недеформируемой среды [36], удовлетворяет уравнению Лапласа.

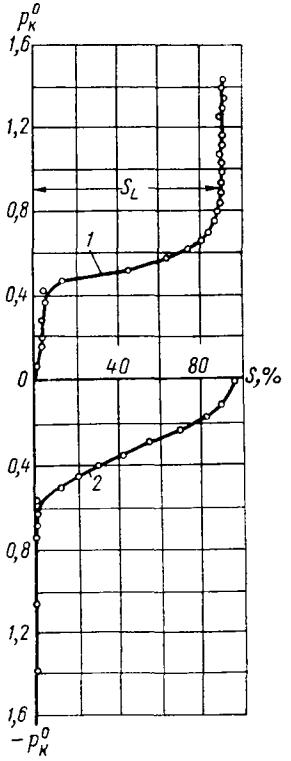


Рис. 26. Безразмерное капиллярное давление как функция насыщенности.

Из соотношения $\operatorname{grad} p_1 = \operatorname{grad} p_k(S)$ видно, что, где больше перепад давления в движущейся (первой) фазе, там резче должно меняться капиллярное давление. Поэтому, если скелет пористой среды смачивается вытесняемой (второй) фазой (рис. 26, кривая *1*), то увеличение расхода первой фазы ведет к возрастанию насыщенности S, которое будет происходить до некоторого предельного значения S_L, соответствующего асимптоте кривой $p_k(S)$ при вытеснении.

При $S = S_L$ относительная проницаемость вытесняемой фазы обратится в нуль. Этот момент соответствует разрыву системы каналов второй фазы — вытесняемая фаза остается в пористой среде в виде защемленных пузырьков. Если же нагнетание в пористую среду первой фазы прекращается до достижения S_L, в среде не только восстанавливается давление, но и выравнивается под действием капиллярных сил насыщенность — система постоянно приходит в равновесное состояние.

Если скелет пористой среды смачивается первой фазой, то капиллярное давление будет велико только при малых значениях S (рис. 26, кривая *2*). Это говорит о невозможности существования капиллярно удерживаемой остаточной насыщенности несмачивающей фазы, так как при больших значениях капиллярные силы становятся крайне незначительны. При таких значениях S давления p_1 и p_2 становятся практически равными и остаточная насыщенность возможна только вследствие обращения в нуль относительной проницаемости второй фазы, что означает разрыв системы каналов.

§ 24. ОСНОВНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ФАЗЫ ТЕЧЕНИЯ. ПРОЯВЛЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭФФЕКТОВ

Особое место среди автомодельных решений уравнения (21.16) занимают два простых решения: плоско-параллельное нестационарное течение к мгновенно пущенной галерее при задании постоянного на ней давления и плоско-радиальный приток к мгновенно включенной с постоянным дебитом скважине. Автомодельность указанных задач отмечала еще Л. С. Лейбензон [131]. Численное решение последней из них для уравнения (21.12) при $\gamma = 2$ приведено в работе [14].

Рассмотрим общий случай произвольного задания величины γ в уравнении (21.12), которое представим в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa u^{1-1/\gamma} \nabla^2 u, \qquad u = \varphi^\gamma, \qquad \varkappa = \gamma D^2. \tag{24.1}$$

При начальных и граничных условиях

$$u(x,\ 0) = 1, \qquad u(\infty,\ t) = 1, \qquad u(0,\ t) = u_c = \text{const} \tag{24.2}$$

решение $u\ (x,\ t)$ одномерной линейной задачи является автомодельным, т. е. зависит лишь от одной переменной: $u\ (x,\ t) = u\ (\xi)$, $\xi = x/\sqrt{2\varkappa t}$ и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u^{1-1/\gamma} \frac{d^2u}{d\xi^2} + \xi \frac{du}{d\xi} = 0, \quad u(\xi)_{/\xi=0} = u_c, \quad u(\xi)_{/\xi\to\infty} = 1. \tag{24.3}$$

Осесимметричная задача при начальных и граничных условиях

$$u(r,\ 0) = 1, \qquad u(\infty,\ t) = 1, \quad (r\,\partial u/\partial r)_{r\to\infty} = -\alpha\lambda \tag{24.4}$$

также является автомодельной — искомая функция $u\ (r,\ t)$ удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$u^a \left(\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi}\right) + \xi \frac{du}{d\xi} = 0,$$

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{2\varkappa t}}, \quad a = 1 - \frac{1}{\gamma}, \quad u(\xi) = 1, \ \xi\to\infty, \ \xi du/d\xi = -\lambda\alpha, \ \xi \to 0. \tag{24.5}$$

Теперь заметим следующее. Величина u всегда положительная величина, т. е. и $u\ (\xi) \geqslant 0$. Однако при достаточно малом ξ из второго граничного условия (24.5) имеем

$$u(\xi) = -\lambda\alpha \ln \xi + A, \quad A = \text{const},$$

т. е. при $\lambda\alpha > 0$ физически необходимое условие $u\ (\xi) \geqslant 0$ выполняется, тогда как при $\xi \to 0$ и при $\alpha\lambda < 0$ это неравенство не

выполняется. Но, если $\alpha\lambda < 0$, второе условие (24.5) следует заменить, как это сделано для фильтрации газа в работе [14], на условия

$$u(\xi_0) = 0, \quad \left(\xi \frac{du}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0} = -\lambda\alpha, \quad \xi_0 \neq 0, \quad \lambda\alpha < 0, \tag{24.6}$$

то при $\xi \to \xi_0$ имеем

$$u(\xi) - u(\xi_0) = -\lambda\alpha \ln(\xi/\xi_0)$$

и условие $u(\xi) \geqslant 0$ выполняется вблизи точки ξ_0. Переход к этому условию соответствует замене скважины пренебрежимо малого (но постоянного) радиуса на фиктивную скважину с расширяющимся радиусом $r_c = \xi_0\sqrt{2\varkappa t}$, на стенках которой (при $\xi = \xi_0$) задают условие постоянного расхода $q = -\lambda\alpha$ и условие постоянства давления.

Разберем метод построения численного решения указанных задач на примере наиболее сложного варианта — осесимметричной задачи при $\alpha\lambda < 0$. Задача формулируется следующим образом: требуется найти такие $u(\xi)$, $q(\xi)$ и ξ_0, чтобы были удовлетворены уравнение (24.5), первое из условий (24.5) и условия (24.6).

Уравнение (24.5) эквивалентно следующей системе:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{q}{\xi}, \quad \frac{dq}{d\xi} = -\xi q u^{-a}. \tag{24.7}$$

Интегрируя второе из уравнений (24.7), получим

$$q(\xi) = x\lambda \exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi} u^{-a} t\, dt\right), \tag{24.8}$$

а затем из первого уравнения (24.7) находим, что

$$u(\xi) = 1 + \lambda\alpha \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi} u^{-a} t\, dt\right) \frac{d\xi}{\xi}. \tag{24.9}$$

Выберем величину $\xi = \xi_1$ настолько большой, что при функции $u(\xi)$ практически не отличается от единицы. Тогда из уравнений (24.8)—(24.9) получим

$$\begin{aligned} u(\xi_1) &= 1 + \frac{1}{2} q(\xi_1) \exp\left(\frac{\xi_1^2}{2}\right) Ei\left(-\frac{\xi_1^2}{2}\right), \\ q_1(\xi_1) &= -\lambda\alpha \exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi_1} u^{-a} t\, dt\right). \end{aligned} \tag{24.10}$$

Процесс построения численного решения системы (24.7) при указанных граничных условиях состоит в следующем. Сначала определяется решение системы (24.7) при $a = 0$, причем считается, что условия $u = 0$, $q = -\lambda\alpha$ выполняются в точке $\xi_0^1 = 0$. Полученная

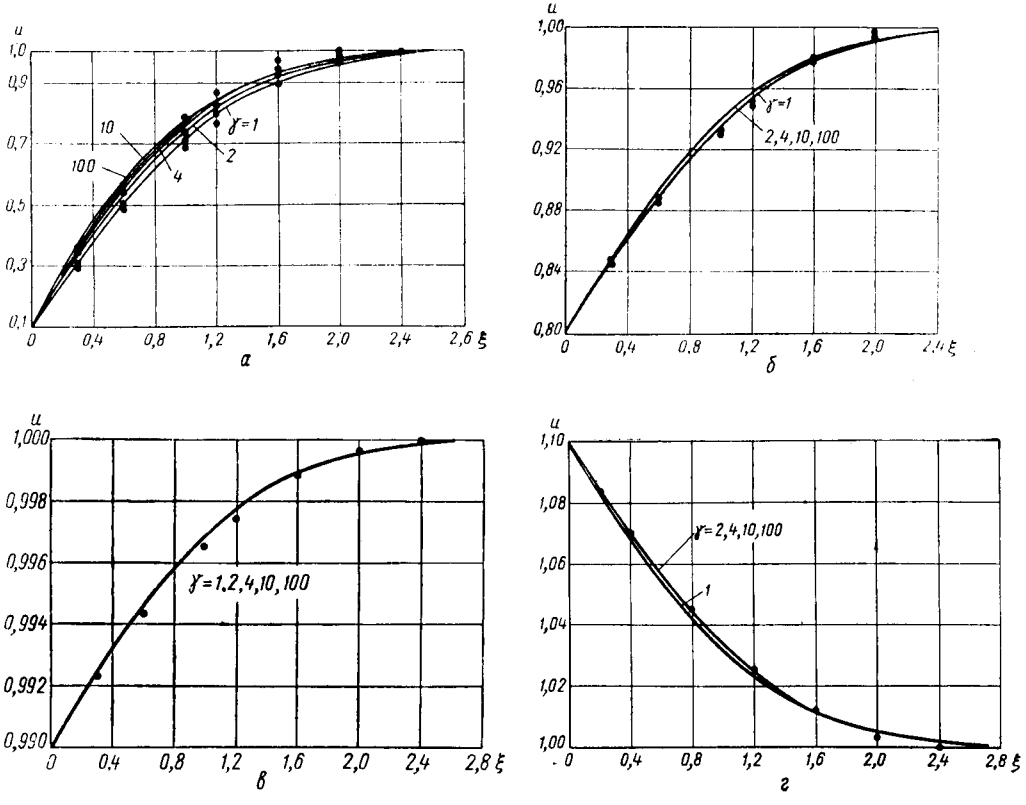
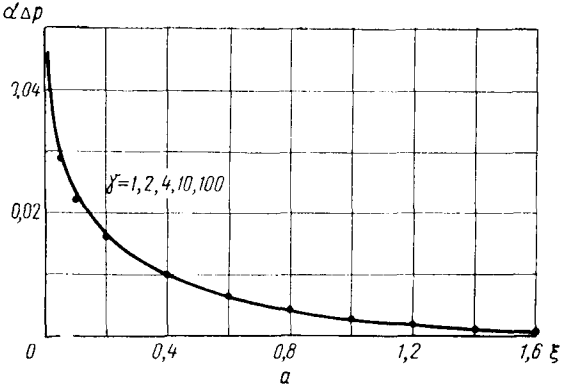
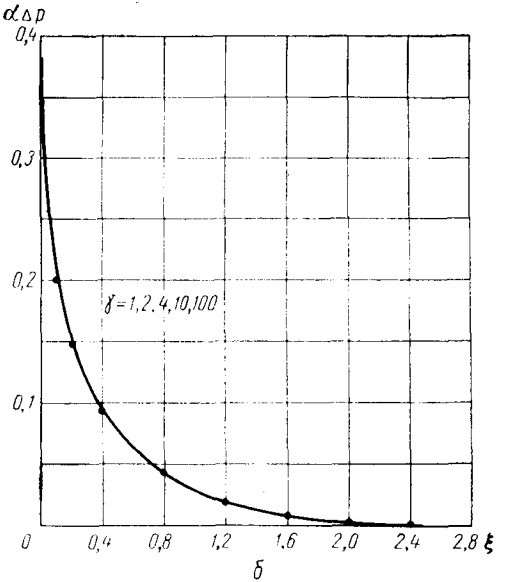


Рис. 27. Сопоставление точных и приближенных решений уравнения (24.1) для линейной фильтрации при u (0):

$а$ — 0,10; $б$ — 0,80; $в$ — 0,99; $г$ — 1,10.





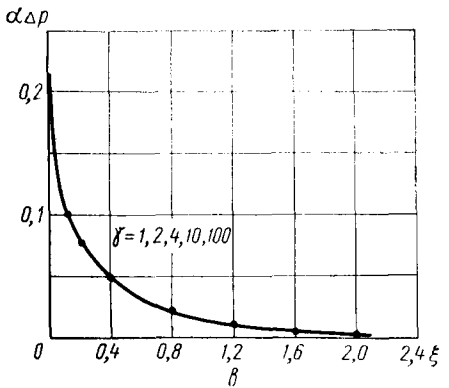


Рис. 28. Сопоставление точных и приближенных решений уравнения (24.1) для осесимметричной фильтрации при $\alpha\lambda > 0$:

а — 0,01; *б* — 0,10; *в* — 0,05.

функция $u^{(0)}(\xi)$, не удовлетворяющая условию $\xi = \xi_0^{(1)}$, $u(\infty) = 1$, используется для нахождения при $a = 0$ по формулам (24.10) граничных условий в точке $\xi = \xi_1$.

Решая систему (24.7) при этих граничных условиях, находим новое приближение $u^{(1)}(\xi)$, $q^{(1)}(\xi)$, по которому подбиралось новое приближение $\xi_0^{(1)}$ для величины ξ_0, снова строим функции $U^{(2)}(\xi)$, $q^{(2)}(\xi)$ и т. д. Уточнение продолжаем до тех пор, пока относительное изменение $u(\xi)$ в n-ом и $(n-1)$-ом приближениях в некоторой промежуточной точке ξ_3 не становилось меньше заданной малой величины. При этом вследствие специфики задания граничных условий (24.10) будет уточняться и условие $q(\xi_0) = -\lambda\alpha$.

При $a_l > a_{l-1}$ за нулевое приближение $u(\xi)$ и ξ_0 принимаем их значения, найденные при a_{l-1}. Уточнение производим по той же схеме, что и при $a = 0$.

Алгоритм построения последовательных приближений для других указанных вариантов автомодельных задач, а также метод применения в расчетах ЭВМ описаны в работе [173].

Перейдем теперь к рассмотрению *результатов численных расчетов* уравнения (24.1), выполненных на быстродействующих электронных машинах.

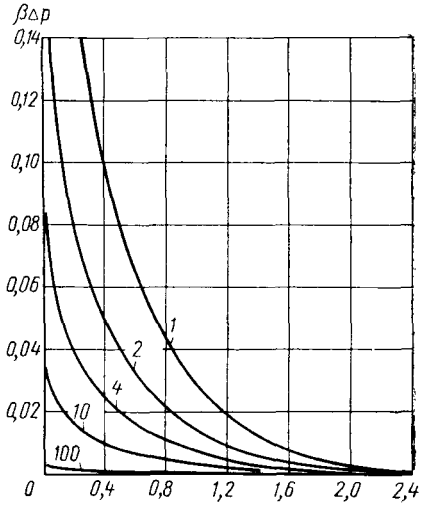


Рис. 29. Зависимость безразмерного давления $\beta\Delta p$ от автомодельной переменной ξ при $\lambda = 0{,}1$.

На рис. 27 приведены результаты расчетов автомодельной задачи для линейного движения сжимаемой однородной жидкости к дренажной галерее при последовательно возрастающих граничных значениях $u_{(0)} = 0{,}1$; 0,8; 0,99; 1,01; 1,1; 3 и большом диапазоне значений параметра $\gamma = 1$, 2, 4, 10, 100. Построенные графики показывают, что при данном выборе искомой функции $u = \varphi^\gamma$ и переменной $\xi = x/\sqrt{2\varkappa t}$ решения для всех γ практически совпадают в реальных условиях небольших снижений давления на галерее и при существенных снижениях давления (весьма малых при больших значениях u_c) решения близки.

На рис. 28 приведены аналогичные результаты расчетов осесимметричной задачи при $\alpha\lambda > 0$, а в табл. 17 при $\alpha\lambda < 0$. Снова специальный выбор искомой величины $u = \varphi^\gamma$ и аргумента $\xi = r/\sqrt{2\varkappa t}$ приводит к практическому совпадению решения для всех значений γ.

При $\gamma = 1$ изучаемые уравнения становятся линейными и построение их решений выполняется весьма просто, но это совпадение существенно зависит от принятого здесь выбора искомой функции

Таблица 17

ξ	ln u при γ				
	1	2	4	10	100
			$\alpha\lambda = -0{,}10$		
0,001	1,18912	1,18290	1,17971	1,17777	1,17660
0,01	0,62662	0,62308	0,62126	0,62015	0,61949
0,1	0,26911	0,26671	0,26548	0,26474	0,26429
0,4	0,10669	0,10509	0,10428	0,10380	0,10351
0,8	0,04379	0,04292	0,04284	0,04222	0,04207
1,2	0,01813	0,01771	0,01751	0,01739	0,01731
1,6	0,00700	0,00683	0,00674	0,00669	0,00666
2,0	0,00244	0,00238	0,00235	0,00233	0,00232
2,4	0,00076	0,00074	0,00073	0,00073	0,00072
2,8	0,00021	0,00020	0,00020	0,00020	0,00020
3,2	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005
			$\alpha\lambda = -0{,}05$		
0,001	0,42664	0,42664	0,42629	0,42608	0,42595
0,01	0,26501	0,26443	0,26413	0,26394	0,26383
0,1	0,12553	0,12503	0,12478	0,12463	0,12453
0,4	0,05192	0,05156	0,05137	0,05126	0,05119
0,8	0,02166	0,02145	0,02134	0,02128	0,02124
1,2	0,00902	0,00892	0,00887	0,00884	0,00883
1,6	0,00349	0,00345	0,00343	0,00342	0,00341
8,0	0,00122	0,00121	0,00120	0,00120	0,00120
2,4	0,00038	0,00037	0,00037	0,00037	0,00037
2,8	0,00010	0,00010	0,00010	0,00010	0,00010
3,2	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002

и аргумента. В самом деле, если построить, например, зависимость величины ln φ от ξ, то кривые, соответствующие разным значениям параметра γ, разойдутся (рис. 29). Аналогичное расхождение кривых получится, если, например, заменить аргумент $\xi = r/\sqrt{2\varkappa t}$ на $\xi\sqrt{\gamma} = r/\sqrt{2D^2 t}$.

С другой стороны, решения при $\gamma = 1$ при выбранных автомодельной переменной и искомой функции соответствуют решениям уравнения (24.1) при его линеаризации по Л. С. Лейбензону (см. § 25). Отмеченное совпадение решений при всех значениях γ свидетельствует о практической достаточности линеаризации Л. С. Лейбензона для бесконечного пласта.

Этому было дано следующее объяснение [13] — вся область движения фактически разделяется на две области: область квазистационарного движения, где $q = -\lambda\alpha$ и где сосредоточен основной перепад давления, и область малых депрессий, где расход постепенно уменьшается. Поэтому и в первой и во второй областях нелинейное уравнение выполняется достаточно точно.

Существенно, что кривые q (ξ) при $\xi \to 0$ имеют горизонтальную касательную, т. е. практически $q = -\lambda\alpha$ при малых ξ (это положение используется при построении численных автомодельных решений).

Наличие вокруг скважины на расстоянии r кругового непроницаемого контура требует построения неавтомодельного решения уравнения (24.1). Такая неавтомодельная задача была численно рассчитана при помощи быстродействующих электронных машин и описана Б. Б. Лапуком и Ф. А. Требиным [125] для $\gamma = 2$ и $Q = \text{const}$; там же имеются ссылки на более ранние работы.

Результаты расчетов приведены в работе [125] в виде зависимости $\sqrt{u} = f(r, \theta)$, заданной в табличной форме, где r — безразмерное расстояние от скважины; θ — безразмерное время. Непроницаемый контур был расположен на расстоянии $r = 1$. Нами был произведен пересчет результатов [125] на зависимость типа $\sqrt{u} = f(r, \xi)$, где $\xi = r/(2\sqrt{\theta})$ [173].

В той области переменной ξ, где $f(r, \xi) = f(\xi)$ вне зависимости от радиуса r, распределение давления автомодельно (первая фаза движения). Там, где зависимость от r становится существенной, автомодельность нарушается — начинает сказываться наличие непроницаемого контура, кривая $\sqrt{u}$ отходит от автомодельной кривой (вторая фаза движения).

Отметим, что можно построить решения, аналогичные рассмотренным здесь автомодельным числовым решениям, и для других вариантов уравнения (24.1). Возможность построения с помощью подстановки Больцмана $\xi = x\sqrt{t}$ автомодельных решений для систем уравнений типа (21.25) была отмечена М. Д. Розенбергом [191].

В заключение заметим следующее. Проведенные расчеты автомодельной осесимметричной задачи при $\alpha\lambda < 0$ показали, что при практических значениях параметров фиктивная расширяющаяся скважина находится внутри реальной скважины малого радиуса r_c. Поэтому всегда при построении решений нестационарных задач для областей движения $r \gg r_c$ можно математически моделировать скважину точечным источником ($r_c \to 0$) и считать, что физические недостижимые состояния (отрицательные давления) локализуются в ближайшей окрестности оси, радиус которой еще меньше, чем r_c.

Теперь рассмотрим задачу о нестационарных изменениях давления при оттоке жидкости от галереи в пласте, для которого существенны указанные выше нелокальные эффекты — см. систему уравнений (21.40), (21.41). Пусть в момент времени t через галерею в сечении $x = 0$ была мгновенно закачана в пласт масса жидкости G_0. В этом случае $q(x_1, t) = q_0\delta(x_1)\,\delta(t)$, $q_0 = G_0/(m_0\beta\rho_0)$, а поэтому в общее решение (21.44) следует подставить значение $X(\xi, \eta, \tau) = q_0\,\delta(\tau)/\sqrt{2\pi}$. Решение представляется [170] в виде

$$p(x, t) - p_0 = \frac{q_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{1-\omega(1-F(\xi))} \exp\left\{-\frac{x\xi^2 t}{1-\omega(1-F(\xi))}\right\} d\xi =$$

$$= \frac{q_0}{\pi\sqrt{\varkappa t}} J, \qquad (24.11)$$

где использована четность подынтегрального выражения и введены величины

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos nz}{1-\omega\,[\exp(-\chi z^2/4)} \exp\left\{-\frac{z^2}{1-\omega\,[1-\exp(-\chi^2 z^2/4)]}\right\} dz.$$

Значения $0{,}5J$ при $\omega = 0{,}5$, вычисленные на ЭВМ для ряда значений m при $\chi = 0$ (локальная теория) и $\chi = 10$, приведены в табл. 18.

Таблица 18

m	0	0,1	0,5	1,0	2,0	3,0
0,5 при $\chi = 0$	0,4431	0,4420	0,4163	0,3451	0,1630	0,0467
0,5 при $\chi = 10$	0,4386	0,4380	0,4208	0,3706	0,2147	0,0662

Из выражения (24.11) следуют решения для предельных частных случаев ($\chi \to 0$ и $\chi \to \infty$), которые можно интерпретировать как асимптотические решения

$$p(x,\ t) - p_0 = \frac{q_0}{\sqrt{\varkappa t}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa t}\right), \quad d^2 \ll \varkappa t,\ x \approx \sqrt{\varkappa t}\ (\chi = 0),$$

$$p(x,\ t) - p_0 = \frac{q_0\,(1-\omega)^{-1}}{\sqrt{\varkappa_1 t}} \frac{\pi}{4} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa_1 t}\right), \quad \varkappa_1 = \frac{\varkappa}{1-\omega},$$

$$d^2 \gg \varkappa t,\ x \approx \sqrt{\varkappa t}\ \ (\varkappa \to \infty).$$

Как и следовало ожидать, в областях движения, гораздо больших, чем масштаб d, решение примерно соответствует обычной локальной теории. Если же область движения гораздо меньше масштаба d, то также можно приближенно пользоваться локальной теорией, но эффективный коэффициент пьезопроводности оказывается большим: $\varkappa_1 = \varkappa\,(1 - \omega)^{-1}$. Здесь при том же количестве закачанной жидкости давление должно быть больше, чем предсказываемое локальной теорией (сравните подсчет при $m \sim 1$, $\chi = 0$ и $\chi = 10$).

Рассмотрим решение задачи о перераспределении давления в окрестности импульсивно включенной точечной скважины [1]. Если Q — количество закачанной в пласт жидкости; $p_0(r)$ — начальное стационарное распределение давления, то относительно безразмерной функции $u(r,\ t)$, введенной равенством

$$p(r,\ t) = p_0(r) + \frac{Q\mu}{2\pi kh}\, u(r,\ t), \tag{24.12}$$

[1] Задача рассмотрена Е. Ф. Афанасьевым и В. Н. Николаевским.

задача сводится — см. формулу (21.45) — к решению интегродифференциального уравнения

$$(1-\omega)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{2\omega}{d^2}\int_0^\infty I_0\left(2\frac{r\rho}{d^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2+\rho^2}{d^2}\right)\frac{\partial u(\rho,\ t)}{\partial t}\rho d\rho=$$

$$=\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\varkappa Q(t)\frac{\delta(r)}{r} \qquad (24.13)$$

при следующих условиях:

$$u(r,\ 0),\ (r\,\partial u/\partial r)=0 \text{ при } r=0,\ t>0. \qquad (24.14)$$

Здесь $G_0(r,\ t)=\delta(r)\,Q(t)$, $\delta(r)$ — функция Дирака. Решение (получаемое применением интегрального преобразования Ханкеля) имеет для трансформанты $U(\lambda,\ t)$ вид

$$U(\lambda,\ t)=\int_0^t\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2}\frac{Q(t)}{k_0}e^{-\varphi(\lambda)(t-\tau)}d\tau,\ U(\lambda,\ t)=\int_0^\infty u(r,\ t)\,J_0(\lambda r)\,r dr,$$

$$\varphi(\lambda)=\frac{\varkappa\lambda^2}{1-\omega^2\left[1-\exp\left(-\frac{d^2}{4}\lambda^2\right)\right]}. \qquad (24.15)$$

В частности, при $Q(t)=\delta(t)$ имеем

$$U(\lambda,\ t)=\varphi(\lambda)\,\lambda^{-2}\exp(-\varphi(\lambda)\,t),$$

и для самой функции $u(r,\ t)$ получим

$$u(r,\ t)=\int_0^\infty\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda}e^{-\varphi(\lambda)t}J_0(\lambda r)\,d\lambda=\frac{1}{t}\int_0^\infty\psi(z;\ \chi)\,e^{-\psi(z;\ \chi)}J_0\left(\frac{rz}{\sqrt{\varkappa t}}\right)\frac{dz}{z}. \qquad (24.16)$$

Здесь

$$\chi=d^2/(4\varkappa t),\ z^2=\varkappa\lambda^2 t,\ \psi=z^2/[1-\omega(1-e^{-\chi z^2})].$$

§ 25. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

а. Методы линеаризации

Известен целый ряд способов линеаризации. Рассмотрим в наиболее общей постановке метод линеаризации Л. С. Лейбензона. Он заключается в том, что параметр $\bar{\varkappa}$ в уравнении (21.16) принимается функцией давления в какой-либо фиксированной точке, т. е. $\bar{\varkappa}$ не зависит от координат. При этом вводится новое время: $d\tau=\bar{\varkappa}(t)\,dt$ и уравнение (21.16) становится линейным

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\tau}=\varkappa\frac{\partial^2\mathcal{P}}{\partial x_i\partial x_i}. \qquad (25.1)$$

Первому приближению в методе линеаризации по Л. С. Лейбензону соответствует задание постоянного (начального) давления в выражении для $\varkappa$, т. е. $\varkappa = \text{const}$. Для плоско-параллельного движения решение уравнения (25.1) имеет вид

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_c + (1 - \mathscr{P}_c)\,\Phi(\xi_1),\quad \xi_1 = \frac{x}{\sqrt{2\varkappa t}}. \tag{25.2}$$

В первом приближении $\tau = t$. В частном случае экспоненциальных соотношений для капельной жидкости $\mathscr{P} = \varphi^{\gamma} = u$; $\Phi(\xi)$ — интеграл вероятности [207].

Для осесимметричного движения к скважине согласно уравнению (25.1) имеем

$$\mathscr{P} = 1 - \frac{Q}{2} Ei\left(\frac{r^2}{4\varkappa\tau}\right). \tag{25.3}$$

В первом приближении $\tau = t$; при экспоненциальных соотношениях для капельной жидкости $\mathscr{P} = \varphi^{\gamma} = u$.

Вторым приближением линеаризации Л. С. Лейбензона является принятие зависимости $\bar{\varkappa}(p_{ср})$, где $p_{ср}$ — средневзвешенное (меняющееся во времени) давление в зоне движения. Величину $p_{ср}$ можно вычислить из уравнения материального баланса. Как и раньше, здесь вводится новое время: $d\tau = \varkappa\{p_{ср}(t)\}\,dt$.

Б. Б. Лапук [122] принимал среднее давление равным контурному, что упрощало решение ряда задач. Однако для решения основных модельных задач нет необходимости заменять среднее давление на контурное — переход от времени t к времени τ производится достаточно просто.

Для уравнения (24.1) связь между старым и новым временем имеет вид

$$\tau = \int [\bar{u}(t)]^{\frac{1}{\gamma}-1} dt, \tag{25.4}$$

где $\bar{u}$ — функция среднего давления $p_{ср}(t)$.

Для частного случая фильтрации идеального газа $\gamma = 2{,}0$ и $Q = \text{const}$ формула (25.4) при использовании уравнения материального баланса преобразуется в следующую:

$$\tau = p_0 t\left[1 - \frac{1}{2}\frac{Qt}{\Omega}\right], \tag{25.5}$$

где Ω — запасы газа.

Для этого же частного случая были сопоставлены решения, полученные на ЭВМ [88], и указанным выше методом линеаризации, сопоставление свидетельствует о хорошем совпадении полученных результатов. Следует отметить, что в настоящее время указанный здесь метод линеаризации широко используется при решении задач на электроаналоговых машинах [21, 238].

Подчеркнем, что за время первой фазы количество выпущенного газа мало, т. е. коэффициент $(Qt/\Omega) \ll 1$. Поэтому для первой фазы из формулы (25.5) следует, что $\tau = p_0 t$ и новое время вводится лишь путем замены искомой величины в выражении для $\varkappa$ на начальное ее значение. Подтверждение пригодности первого приближения линеаризации Л. С. Лейбензона для первой фазы течения дано также в § 24.

В самом деле, при $p = p_0$ переменный множитель в коэффициенте уравнения (24.1) обращается в единицу $u^{1-1/\gamma}|_{p=p_0} = 1$. Но при $\gamma = 1$ имеем аналогично $u^{1-1/\gamma} = 1$. Отсюда результаты подсчета на ЭВМ при $\gamma = 1$ соответствуют линеаризованному решению (первому приближению), а их практическое совпадение с решениями при $\gamma \neq 1$ свидетельствует об его практической пригодности.

При рассмотрении задач о фильтрации реального газа для первой фазы вследствие условия $p_{ср} \approx p_к = p_0$ (где $p_к$ — контурное давление) формулу для введения нового времени τ можно упростить: $\tau = \bar{\varkappa}(P_0)\, t$, а для второй фазы, если задаться экспоненциальными представлениями функции $k\,(p)$, $\mu\,(p)$, $z\,(p)$, $m\,(p)$, время τ вводится следующим образом:

$$\tau = \int_0^t p_{ср}\,(t)\, e^{\alpha (p_{ср} - p_н)} dt, \quad \alpha = \frac{1}{k}\frac{dk}{dp} - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dp} - \frac{1}{z}\frac{dz}{dp}. \qquad (25.6)$$

б. Методы моментных соотношений

Эти методы достаточно эффективны при анализе одномерных задач. Рассмотрим схему построения решения на примере решения уравнения (24.1).

Распределение давления задается в следующей общей форме:

$$\varphi^\gamma(r,\ t) = \varphi^\gamma(R_к) - f\,(Q^*,\ r,\ t), \qquad (25.7)$$

где R_k — граница пласта; $f = f\,(Q^*, r, t)$ — полиноминальная функция, коэффициенты которой определяются из граничных условий.

При первой фазе движения роль R_k играет приведенный $R\,(t)$ подвижной границы возмущенной зоны, определяемой условиям $\varphi^\gamma = \text{const}$ при $r = R\,(t)$.

При второй фазе движения $R = R_k = \text{const}$, но при этом падает давление на границе пласта, $\varphi^\gamma\,(R_k) = f\,(t)$. В первом случае неизвестна $R\,(t)$, во втором $\varphi^\gamma\,(R_k) = f\,(t)$. Для их определения используется уравнение материального баланса. Принципиальной разницы в различных вариантах метода моментных соотношений нет. Они различаются только формой заданной функции $f\,(Q^*,\ r,\ t)$.

Наиболее обобщенным вариантом является метод интегральных соотношений [9], который будет ниже проиллюстрирован на примере решения задачи об осесимметричной фильтрации.

Для линейного движения при начальных и граничных условиях

$$\varphi(x,\ 0)=1,\ \varphi(0,\ t)=\varphi_0,\ \varphi(\infty,\ t)=1 \qquad (25.8)$$

метод интегральных соотношений приводит к такому результату:

$$\varphi^\gamma=\varphi_0^\gamma+(1-\varphi_0^\gamma)\,A\xi\,(2-A\xi),\ A=\sqrt{\frac{\gamma\,(1-I)}{2\,(1-\varphi_0^\gamma)}},\ \xi=\frac{x}{\sqrt{2\varkappa t}}, \qquad (25.9)$$

$$I=\int_0^1\{1+(\varphi_0^\gamma-1)\,(2z-z^2)\}^{1/\gamma}dz.$$

Интеграл $I=I(\varphi_0,\ \gamma)$ в каждом конкретном случае должен подсчитываться в зависимости от значений параметров φ_0, γ (рис. 30).

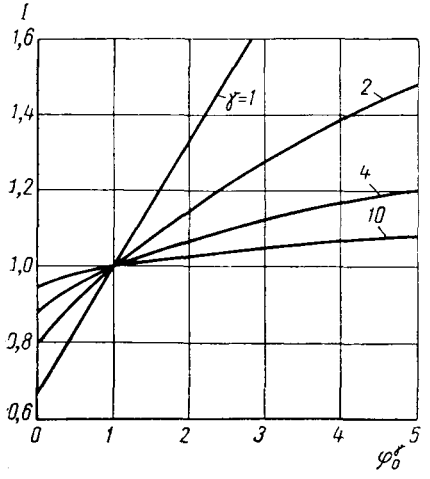


Рис. 30. Зависимость интеграла I от значений параметров φ_0 и γ для линейной фильтрации.

Заметим, что метод интегральных соотношений для уравнения изотермической фильтрации газа ($\gamma=2$) был применен в работах [88, 118].

Для *осесимметричного нестационарного движения* (неустановившегося притока в период пуска скважины) с постоянным дебитом граничные и начальные условия имеют вид

$$\varphi(r,\ 0)=1,\ \varphi(\infty,\ t)=$$

$$=1,\ (r\,\partial\varphi^\gamma/\partial r)_{r\to 0}=-\alpha\lambda,\ \alpha\lambda>0. \qquad (25.10)$$

Согласно методу интегральных соотношений, вся область движения разбивается границей $r=R(t)$ на две зоны. Во внешней зоне изменений давления нет, а во внутренней будем искать функцию давления (в первом приближении) в виде

$$\varphi^\gamma(r,\ t)=\varphi_1\ln\frac{r}{R(t)}+\varphi_2+\varphi_3\frac{r}{R(t)}. \qquad (25.11)$$

Вследствие разбиения области течения на две зоны условия (25.10) заменяются на следующие:

$$\varphi(R(t),\ t)=1,\ (\partial\varphi^\gamma/\partial r)_{r=R(t)}=0,\ (r\,\partial\varphi^\gamma/\partial r)_{r\to 0}=-\alpha\lambda. \qquad (25.12)$$

Из этих условий следует, что

$$\varphi^\gamma(r,\ t)=Q\ln\frac{r}{R(t)}+Q+1-Q\frac{r}{R(t)},\quad Q=-\alpha\lambda. \qquad (25.13)$$

Для определения функций $R(t)$ воспользуемся интегральным соотношением, соответствующим уравнению (24.1), записанному для осесимметричного движения:

$$\frac{d}{dt}\int_0^{R(t)}\varphi(r,\ t)\,r\,dr = D^2\left(r\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial r}\right)_{r=R} - D^2\left(r\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial r}\right)_{r=0} + \\ + \left(\varphi(r,\ t)\,r\frac{dr}{dt}\right)_{r=R} - \left(\varphi(r,\ t)\,r\frac{dr}{dt}\right)_{r=0}. \qquad (25.14)$$

Это соотношение в силу уравнений (25.12) и (25.13) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int_0^{R(t)}\left(Q\ln\frac{r}{R(t)} + Q + 1 - Q\frac{r}{R}\right)^{1/\gamma} r\,dr = -D^2Q + \frac{1}{2}\frac{d^2R(t)}{dt^2}. \qquad (25.15)$$

Решая уравнение (25.15) относительно $R(t)$, получим

$$R(t) = \sqrt{\frac{2D^2Qt}{1-2I}}, \quad I = \int_0^1 (Q\ln z + Q - Qz + 1)^{1/\gamma} z\,dz, \qquad (25.16)$$

$$z = r/R(t).$$

Интеграл $I(\alpha\lambda,\ \gamma)$ вычисляется численно (рис. 31, *а*). Подстановкой выражения (25.16) в формулу (25.13) получим окончательный результат

$$\varphi^\gamma(r,\ t) = 1 - Q(A\xi - 1 - \ln A\xi),\ \xi = \frac{r}{\sqrt{2\varkappa t}},\ A = \sqrt{\gamma(1-2I)\,Q^{-1}}. \qquad (25.17)$$

Перейдем теперь к случаю $\alpha\lambda < 0$. Здесь условие $(r\partial\varphi^\gamma/\partial r)_{r\to 0} = -\alpha\lambda$ следует (см. § 24) заменить на такое

$$\left(r\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial r}\right)_{r=r_c} = -\alpha\lambda, \qquad (25.18)$$

где r_0 — радиус фиктивной скважины — малая величина, определяемая еще одним условием $\varphi(r_0,\ t) = \varphi_0$. Соответствующее решение [173] имеет вид

$$\varphi^\gamma = Q\ln A\xi + 1 + Q - QA\xi,\ \xi = \frac{r}{\sqrt{2\varkappa t}}, \qquad (25.19)$$

$$R(t) = \sqrt{\frac{2\varkappa Qt}{\gamma(1-2I_0)}},\quad A = \sqrt{\frac{Q}{\gamma(1-2I_0)}},\quad \frac{r_0}{r} \ll 1.$$

Интеграл I_0 затабулирован (рис. 31, *б*).

Результаты расчета по формулам (25.9), (25.17) и (25.19) нанесены точками соответственно на рис. 27, 28. Как видно, совпадение приближенных численных решений этих же задач на ЭВМ получилось вполне удовлетворительным для всех значений γ.

Заметим, что формулы (25.9) и (25.17) — первые приближения согласно методу моментов [9]. Последующие приближения [88] лишь уточняют некоторые числовые коэффициенты в полученных выше формулах.

Решение нелинейных уравнений методами моментных соотношений требует численного нахождения интегралов типа I_0, I. Это вызывает определенные трудности при использовании полученных формул для обратных задач. В связи

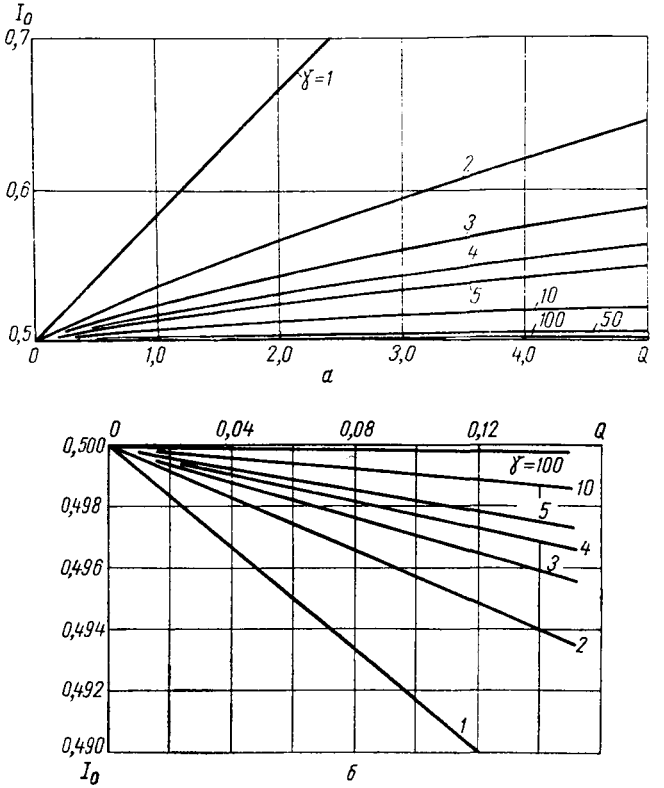


Рис. 31. Зависимость интеграла I от значений параметров $\alpha\lambda$ и γ для осесимметричной фильтрации:

$а$ — $\alpha\lambda > 0$; $б$ — $\alpha\lambda < 0$.

с этим отметим некоторые особенности фильтрации идеального газа, когда вычисление интеграла I_0 сводится к нахождению средневзвешенного по объему давления

$$p_{ср} = \frac{1}{V} \int_V \sqrt{p_к - f(Q^*, r, t)}\, dV, \tag{25.20}$$

где $p_к$ — давление на внешней границе.

Вычисление интеграла в правой части формулы (25.20) из-за сложности функциональной зависимости $f(Q^*, R, t)$ либо приводит к очень громоздким

формулам, либо вообще оказывается невозможным. Поэтому Б. Б. Лапук [212] предложил приближенный метод вычисления этого интеграла путем разложения корня в биноминальный ряд, однако этот способ можно использовать лишь для решения первой фазы нестационарной фильтрации, т. е. $p_к = 1$. Для второй же фазы он облегчал вычисление интеграла, но приводил к очень сложным выражениям для $p_к(t)$.

При анализе решений задач о нестационарной фильтрации в круговом пласте с центральной скважиной и в прямоугольном пласте с одной галереей [84] было замечено, что среднее давление практически точно соответствует давлению в точках $R = 0{,}6$ (радиальная фильтрация) и $x = 0{,}4$ (плоско-параллельная фильтрация). Эта закономерность наблюдалась для широкого диапазона изменений безразмерного дебита Q^*. Поэтому можно предложить брать в качестве среднего давление в точках $R = 0{,}6$ (или $x = 0{,}4$). Если в пласте имеются скважина и несколько батарей (несколько галерей, пласт переменной мощности и т. д.), применение предлагаемого способа встречает определенные затруднения.

Можно также предположить [84], что средневзвешенный по объему квадрат давления примерно равен квадрату среднего давления, т. е.

$$\frac{1}{V}\int_V p^2(R)\,du = \left[\frac{1}{V}\int_V p(R)\,dV\right]^2. \qquad (25.21)$$

Использование формулы (25.21) вместо (25.20) существенно упрощает решение ряда задач нестационарной фильтрации газа.

В табл. 19 приведено сопоставление величин $(p_{ср})^2$ и $(p^2)_{ср}$ для стационарной радиальной и прямолинейной фильтрации в зависимости от величины отношения давлений на границах пласта: p_{min} и p_{max}.

Таблица 19

$\frac{p_{min}}{p_{max}}$	$(p_{ср})^2/(p^2)_{ср}$	
	прямолинейное движение	радиальное движение
0	0,890	0,965
0,2	0,915	0,975
0,4	0,955	0,963
0,6	0,980	0,990
0,8	0,997	0,996
1,0	1,000	1,000

Таблица 20

$Q^*\tau$	$\bar{p}_с$			$\bar{p}_{max}$		
	ЭВМ	по формуле (25.21)	ошибка, %	ЭВМ	по формуле (25.21)	ошибка, %
0,1	0,684	0,637	+0,5	0,910	0,912	+0,2
0,2	0,543	0,543	+1,0	0,810	0,814	+0,5
0,3	0,379	0,389	+2,5	0,710	0,716	+0,7
0,4	0,116	0,147	+26,5	0,611	0,618	+1,3

Примечание. $\bar{p}_с = p_с/p_н$; $\bar{p}_{max} = p_{max}/p_н$, где $p_с$, p_{max}, $p_н$ — давление соответственно на забое скважины, на нейтральной линии и начальное.

Встречающиеся на практике величины отношений $\frac{p_{min}}{p_{max}} > 0{,}2 \div 0{,}4$.

При этом ошибка в вычислении $(p_{ср})^2$ для радиальной фильтрации не превышает 2—3% (точность для практики вполне допустимая).

Е. М. Минский и А. С. Малых [146] получили на ЭВМ решения целого ряда задач по совместной работе скважин, которые были сопоставлены с приближенными аналитическими, вычисленными с помощью формулы (25.21). Эти сопоставления показали достаточно хорошую сходимость результатов. При этом имеющиеся расхождения связаны с погрешностями не только формулы (25.21), но и самого приближенного метода. Для примера в табл. 20 приведено сопоставление решений, полученных на ЭВМ и методом осреднений с учетом формулы (25.21), задачи о совместной работе центральной скважины и концентричной к ней батареи [84].

в. Метод малого параметра

Этот метод состоит в следующем. Искомое решение находят в виде степенного ряда по отношению к некоторому параметру, характеризующему граничные условия. Подставляя такое разложение решения в нелинейное дифференциальное уравнение, задачу сводят к решению бесконечной цепочки линейных дифференциальных уравнений с правой частью.

Этот метод, близкий по идее к методу малого параметра в нелинейной механике, ранее использован в теории фильтрации П. Я. Полубариновой-Кочиной [181] для исследования неустановившегося плоско-параллельного безнапорного движения грунтовых вод в полубесконечном пласте. В дальнейшем этим методом С. Н. Бузинов и И. Д. Умрихин [38] получили целый ряд решений задач по неустановившейся фильтрации реальных жидкостей и газов как для бесконечных, так и для конечных пластов. Следует отметить, что первое приближение линеаризации Л. С. Лейбензона (изложенное выше) дает результат, аналогичный решению первого уравнения в методе малого параметра.

В качестве примера рассмотрим решение методом малого параметра [38] уравнения (21.10) для плоско-радиальной фильтрации, бесконечного пласта и постоянного дебита (автомодельная задача).

Представим искомое решение в виде

$$p^2(r,\ t) = p_0^2 + qp_1(r,\ t) + q^2p_2(r,\ t) + q^3p_3(r,\ t) + \ldots, \quad (25.22)$$

где q — расход газа на стенке скважины нулевого радиуса.

Функции $p_1(r,\ t)$, $p_2(r,\ t)$ являются решениями следующей цепочки линейных дифференциальных уравнений:

$$\varkappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad \varkappa = \frac{kp_0}{m\mu},$$

$$\varkappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial t}\right) + f_2(r,\ t) = \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad f_2(r,\ t) = \frac{1}{4p_0^2}\frac{\partial}{\partial t}p_1^2(r,\ t), \quad (25.23)$$

$$\varkappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_3}{\partial t}\right) + f_3(r,\ t) = \frac{\partial p_3}{\partial t},$$

$$f_3(r,\ t) = \frac{1}{2p_0^2}\frac{\partial}{\partial t}p_1p_2 - \frac{1}{8p_0^4}\frac{\partial}{\partial t}p_1^3$$

и т. д. со следующими начальными и граничными условиями для функций $p_1(r,\ t)$, $p_2(r,\ t)$, $p_3(r,\ t)$, . . .:

$$\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=0} = -\frac{\mu p_{ат}}{\pi kh},\quad \left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right)_{r=0} = \left(r\frac{\partial p_3}{\partial r}\right)_{r=0} = \ldots = 0, \tag{25.24}$$

$$p_1(r,\ 0) = p_2(r,\ 0) = p_3(r,\ 0) = \ldots = 0$$

$$p_1(\infty,\ t) = p_2(\infty,\ t) = p_3(\infty,\ t) = \ldots = 0.$$

Решение первого уравнения системы (25.23) имеет вид

$$p_1(r,\ t) = -\frac{\mu p_{ат}}{2\pi kh}\,Ei(-\xi^2),\quad \xi = \frac{r}{2\sqrt{\varkappa t}}. \tag{25.25}$$

Тогда функция $f_2(r,\ t)$ определяется как

$$f_2(r,\ t) = -\frac{1}{2t}\left(\frac{\mu p_{ат}}{2\pi khp_0}\right)^2 Ei(-\xi^2)\,e^{-\xi^2} \tag{25.26}$$

и второе уравнение системы (25.23) будет

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi\right)\frac{d\varphi}{d\xi} = 2Ei(-\xi^2)\,e^{-\xi^2},\ p_2(r,\ t) = \left(\frac{\mu}{2\pi kh}\frac{p_{ат}}{p_0}\right)^2\varphi(\xi). \tag{25.27}$$

Его решение, построенное методом вариаций, имеет вид

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{2}Ei(-\xi^2)\,e^{-\xi^2} + Ei(-2\xi^2) - \frac{1}{2}Ei(-\xi^2). \tag{25.28}$$

Для малых значений $\xi\,\varphi(\xi) = \ln 2 = 0{,}6931$. Аналогичным образом определяют и функцию $p_3(r,\ t)$ и т. д.

Окончательно имеем для третьего приближения ($\bar{p} = p/p_0$, $q^* = Q\mu\ p_{ат}/2\pi khp_0^2$) для малых значений z формулу

$$\bar{p}^2 = 1 + q^*\ln\frac{2{,}25\varkappa t}{r^2} + 0{,}6931q^{*2} - 1{,}191q^{*3}. \tag{25.29}$$

Для практически встречающихся случаев величина q^* не будет превосходить значений (0,05 ÷ 0,1). Из выражения (25.29) следует

$$p_c^2 = 1 + q^*\ln(2{,}25\varkappa t/r_c^2), \tag{25.30}$$

т. е. получена формула, аналогичная (25.3).

Таким же образом в работе [38] получены решения и для фильтрации реальных жидкостей и газов. При этом решение в виде степенного ряда записывается относительно функции, выражение которой определяется принятой зависимостью параметров k, μ, z от давления.

г. Метод осреднения временной производной

Согласно методу осреднения временной производной [56] вместо левой части уравнения (21.16) вводится

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\frac{1}{\varkappa(t)}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t}=f(t), \tag{25.31}$$

где Ω — объем порового пространства дренируемой части пласта.

Если газ идеальный и пласт недеформируемый, операция (25.31) выражает осреднение по координате производного давления по времени. С учетом (25.31) решение уравнения (21.16) для осесимметричной фильтрации запишется в виде

$$\mathscr{P}=\frac{f(t)}{4}r^2+c_1\ln r+c_2, \tag{25.32}$$

где $f(t)$, C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$r=R_c \quad r\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial r}=\overline{Q}(t),$$

$$r=R \quad r\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial r}=0, \quad \mathscr{P}=\mathscr{P}_0=\text{const},$$

$$\overline{Q}(t)=\frac{T_{\text{пл}}}{T_{\text{ат}}}p_{\text{ат}}\frac{Q(t)}{2\pi h}, \quad \mathscr{P}_0=\int_0^{p_0}\frac{k(p)\,p}{\mu(p)\,z(p)}dp\,. \tag{25.33}$$

Нетрудно показать [85], что в этом случае получается решение, аналогичное решению для идеального газа, в котором функция p^2 заменена на $\mathscr{P}$.

С. Н. Бузинов и И. Д. Умрихин [38] использовали для решения уравнения (21.16) метод малого параметра, о котором говорилось выше. При этом в уравнении (21.16) было положено $\varkappa=\text{const}$, $\mu=\text{const}$, $z=(1+\alpha p+\beta p^2)^{-1}$ (z — коэффициент сверхсжимаемости газа; α и β — постоянные коэффициенты).

§ 26. НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В соответствии с проведенным выше анализом будем пользоваться либо полной системой уравнений фильтрации о средах с двойной пористостью (22.1)—(22.2) и переходить к частным условиям $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ в построенных решениях, либо упрощенной системой (22.24)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \varkappa \nabla^2 p_2 \\ \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \varkappa \nabla^2 p - \frac{p_2 - p_1}{\tau} \end{aligned}\right\}, \tag{26.1}$$

соответствующей кавернозно-трещиноватым пористым средам.

Построенные решения системы (26.1) могут быть интерпретированы как приближенные решения для фильтрации газа. В самом деле, линеаризация системы (22.27), проведенная по аналогии с отмечавшейся выше линеаризацией Л. С. Лейбензона [131], приводит ее именно к системе (26.1). Перепишем уравнения (22.27) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} &= \varkappa_0 \nabla^2 p^2 \\ p_1^2 = p_2^2 + \varepsilon_2 \frac{\eta}{\varkappa_0} \frac{\partial p_2}{\partial t} &- \eta \nabla^2 p_2^2 \end{aligned}\right\}. \tag{26.2}$$

Из второго уравнения (26.2) видно, что при $\eta \to 0$ давления в первичных и вторичных порах выравниваются ($p_1 \to p_2$), и первое уравнение переходит в обычное нелинейное уравнение изотермической фильтрации идеального газа. Линеаризация последнего (см. § 25) — первое приближение в методе Л. С. Лейбензона, вполне достаточное для исследования движений в бесконечном пласте, состоит в преобразовании $dp/dt = {}^1/_2 p^{-1}\, dp^2/dt$ и в последующем введении приближения $dp/dt \approx {}^1/_2 p_0^{-1}\, dp^2/dt$, где p_0 — начальное давление (и практически совпадающее со средним давлением по всей области движения). Поскольку в средах с двойной пористостью в начальный момент t_0 времени $p_1 = p_2 = p_0$, то систему (26.2) можно также приближенно записать в виде линейной системы относительно квадратов давлений, полностью эквивалентной системе уравнений фильтрации капельной жидкости (26.1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2p_0} \frac{\partial p_1^2}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{1}{2p_0} \frac{\partial p_2^2}{\partial t} &= \varkappa_0 \nabla^2 p^2 \\ p_1^2 = p_2^2 + \varepsilon_2 \frac{\eta}{\varkappa_0} \frac{1}{2p_0} \frac{\partial p_2^2}{\partial t} &- \eta \nabla^2 p_2^2 \end{aligned}\right\}. \tag{26.3}$$

Более сложная система (22.31) нелинейно-упругой фильтрации капельной жидкости линеаризуется следующим образом. Введем переменные $\varphi_2 = 1 - u_2$, $\varphi_1 = u_2^n - u_1$ и положим приближенно

$$\gamma_1 \frac{\partial u_1^{1/\gamma_1}}{\partial t} \approx \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_2^n}{\partial t} \approx n \frac{\partial u_2}{\partial t}.$$

Тогда система (22.31) преобразуется в линейную

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - n\varkappa \nabla^2 \varphi_2 - \frac{\varphi_1}{\tau} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + n \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\varphi_1}{t} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{26.4}$$

В линеаризованных уравнениях (26.2) сохранены неизменными выражения, определяющие переток между системами трещин и пор и поток по системе трещин, они отличаются от исходной нелинейной системы (22.31) только коэффициентами перед производными по времени. Как и при линеаризации Л. С. Лейбензона уравнения фильтрации газа, емкость элемента среды, зависящая от давления, аппроксимируется неизменной емкостью, определяемой начальными условиями (см. примечание на стр. 211).

Система уравнений (26.2) также подобна системе линейных уравнений (26.1) фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах при малых перепадах давления. Поэтому приводимые ниже решения системы (26.1) допускают простой пересчет для фильтрации газа или жидкости с учетом нелинейно-упругих эффектов.

Задаче о притоке к галерее после мгновенного снижения на ней давления [27] соответствуют следующие начальные и граничные условия для полной системы уравнений (22.1)—(22.2):

$$\begin{aligned} &p_1 = p_2 = p_0, \quad t = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad x = \infty, \\ &p_1 = p_2 = p_*, \quad t \geqslant 0, \quad x = 0. \end{aligned} \tag{26.5}$$

Применяя к системе уравнений (22.1)—(22.2) преобразование Лапласа, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ приведенных давлений:

$$u_1 = (p_1 - p_0)/(p_* - p_0), \quad u_2 = (p_2 - p_0)/(p_* - p_0).$$

Нетрудно выписать решение этой системы, удовлетворяющее указанным граничным условиям.

Воспользовавшись условием $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$, т. е. ограничиваясь рассмотрением трещиновато-пористых сред, упростим это решение, пренебрегая ε-малыми величинами по сравнению с единицей:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= -\frac{\varepsilon_1 \tau}{(1+\tau s)^2} \exp\left(-x\sqrt{\frac{1+s\tau}{\tau x \varepsilon_1}}\right) + \frac{1}{s} \exp\left(-x\sqrt{\frac{s(1+\tau s \varepsilon_2)}{\varkappa(1+\tau s)}}\right), \\ \bar{u}_1 &= \frac{\tau}{\tau s + 1} \exp\left(-x\sqrt{\frac{1+\varepsilon\tau}{\tau x \varepsilon_1}}\right) - \frac{\varepsilon_1 s\tau + 1}{s(s\tau+1)} \exp\left(-x\sqrt{\frac{s(1+\tau s\varepsilon_2)}{\varkappa(1+\tau s)}}\right), \end{aligned} \tag{26.6}$$

где s — параметр преобразования Лапласа.

Переход к оригиналам производится по теореме обращения операционного исчисления, причем используется следующее правило:

$$\frac{1}{s} f\left(s + \frac{1}{s}\right) \multimap \int_0^t J_0\left[2\sqrt{\tau(t-\tau)}\right] F(\tau)\, d\tau,$$

где $F(t)$ — оригинал изображения $f(s)$, т. е. $f(s) \multimap\!\bullet\, F(t)$. Окончательно решение одномерной плоской задачи о притоке к галерее имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_1-p_0}{p_*-p} &= \varepsilon_2 F_1(x,\ t) + \frac{1}{\tau}\int_0^t F_1(x,\ z)\,dz + F(x,\ t) \\ \frac{p_2-p_0}{p_*-p_0} &= F_1(x,\ t) + \frac{1}{\tau}\int_0^t F_1(x,\ z)\,dz - \frac{\varepsilon_1}{\tau}F_2(x,\ t) \end{aligned}\right\}. \qquad (26.7)$$

Здесь через F_1, F_2, F_3 обозначены функции:

$$F(x,\ t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varkappa t}}\right),$$

$$F_1(x,\ t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 I_0\left(2\,\frac{t}{\tau}\sqrt{\frac{z\,(1-z)}{\varepsilon_2}}\right)\times$$

$$\times \frac{x}{2\sqrt{xtz/\varepsilon_2}}\exp\left(\frac{-x^2\varepsilon_2}{\varkappa t z} - \frac{zt}{-\tau\varepsilon_2}\right)\frac{dz}{z},$$

$$F_2(x,\ t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left\{\left(t + \frac{x^2}{\varepsilon_1 \varkappa}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varkappa t}}\right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{x^2 t}{\pi \varepsilon_1 \varkappa}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon_1 \varkappa t}\right)\right\}.$$

В малые характерные времена $t \ll \tau$ решение (26.7) переходит в решение уравнений (22.11)

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_1-p_0}{p_*-p_0} &= O(\varepsilon_2) \\ \frac{p_2-p_0}{p_*-p_0} &= \frac{1}{2}\left\{\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{\varkappa\tau}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{\varepsilon_2}}{2\sqrt{\varkappa t}} - \sqrt{\frac{t}{\tau\varepsilon_2}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{x/\sqrt{\varkappa\tau}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{\varepsilon_2}}{2\sqrt{\varkappa t}} + \sqrt{\frac{t}{\tau\varepsilon_2}}\right)\right\} + O(\varepsilon_2) \end{aligned}\right\} \qquad (26.8)$$

Асимптотическое поведение этого решения уравнений (22.11) при $t \to \infty$ имеет вид

$$p_2 = p_0 + (p_* - p_0)\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\varkappa\tau}}\right). \qquad (26.9)$$

При характерных временах $t \approx \tau$ решение (26.7) переходит в следующее решение [1] упрощенных уравнений (22.5):

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_1-p_0}{p_*-p_0} &= \int_0^{t/\tau} \varphi_1(x, z)\,dz + 0(\varepsilon_1), \quad x>0 \\ \frac{p_2-p_0}{p_*-p_0} &= \varphi_1(x, t) + \int_0^{t/\tau} \varphi_1(x, z)\,dz \\ \varphi_1(x, t) &= e^{-t/\tau} \int_0^{\infty} I_0\left(2\sqrt{\frac{tz}{\tau}}\right) \frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa\tau z}}\, e^{\frac{-x^2}{4\varkappa\tau} - z}\, \frac{dz}{z} \end{aligned}\right\}. \qquad (26.10)$$

Решение уравнений (26.10) для возмущения давления в трещинах удовлетворяет граничному условию (26.5) и начальному (26.9); решение для возмущения давления p_1 в блоках удовлетворяет нулевому начальному условию и граничному

$$\frac{p_1-p_0}{p_*-p_0} = e^{-t/\tau}, \quad x=0. \qquad (26.11)$$

При постановке осесимметричной задачи о пуске в момент времени $t = 0$ скважины с постоянным дебитом Q, вскрывающей бесконечный трещиновато-пористый пласт, будем считать радиус скважины r_c весьма малым, но конечным

$$p_1(r=r_c, t) = p_2(r=r_c, t), \quad \frac{2\pi kh}{\mu}\left\{\frac{r\,\partial p_2}{\partial r} + \varepsilon_1 \frac{r\,\partial p_1}{\partial r}\right\}_{r=r_c} = Q. \qquad (26.12)$$

Помимо условий (26.12), потребуем ограниченности функции на бесконечности и удовлетворения начальным условиям покоя. Решение выписывается [1] для трансформант Лапласа — Карсона $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ безразмерных функций u_1, u_2, вводимых следующим образом:

$$p_1(r, t) = p_0 - \frac{Q\mu}{2\pi kh} u_1(r, t), \quad p_2(r, t) = p_0 - \frac{Q\mu}{2\pi kh} u_2(r, t).$$

В пренебрежении ε-малых величин (по сравнению с единицей) это решение принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= C_1 \frac{\varepsilon_2 s_* + \lambda}{s_* + \lambda} K_0\left(R\sqrt{\frac{s(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right) - C_2 \frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1 \lambda} K_0\left(R\sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}}\right), \\ \bar{u}_2 &= C_1 K_0\left(R\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right) + C_2 K_0\left(R\sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}}\right), \end{aligned}\right. \qquad (26.13)$$

где введены следующие безразмерные переменные:

$$s_* = \frac{r_c^2}{\varkappa} s, \quad \lambda = \frac{r_c^2}{\varkappa\tau}, \quad R = \frac{r}{r_c}.$$

---

[1] Решение уравнений (26.10) в другом представлении было дано в работе [18] — см. также исправления [11, 74]. В исправленном виде оно приведено в книге [192].

Удовлетворение граничного условия (при $R = 1$) для суммарного потока и условия равенства давлений определяют постоянные C_1, C_2 в виде

$$C_1 = \frac{1}{s_* z} K_0\left(\sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}}\right); \quad C_2 = -\frac{\varepsilon_1 \tau \lambda^2}{z\,(s_* + \lambda)^2} K_0\left\{\sqrt{\frac{s_*\,(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right\}, \tag{26.14}$$

$$z = \left\{\sqrt{\frac{s\,(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}} K_1\left(\sqrt{\frac{s_*\,(\varepsilon_2 s + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right) K_0\left(\sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}}\right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_1 \frac{s_*^2}{(s_* + \lambda)^2} \sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}} K_0\left(\sqrt{\frac{s_*\,(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right) K_1\left(\sqrt{\frac{s_* + \lambda_*}{\varepsilon_1}}\right)\right\}.$$

Трудность дальнейшего упрощения полученного решения состоит в том, что помимо малых величин ε_1, ε_2 в силу граничных условий в решение задачи вошла еще одна малая величина

$$\lambda = r_c^2/\varkappa\tau \ll 1.$$

Поэтому для выбора эффективного упрощенного решения рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Радиус скважины r_c всегда намного меньше ширины зоны резкого изменения p_1 (оцениваемой как $\sqrt{\varepsilon_1 \varkappa\tau}$), т. е. $(r_c^2/\varepsilon_1 \varkappa\tau) \ll (1 + sz)^{-1}$, для всех возможных значений параметра $s\tau$ (или в безразмерных переменных: $\varepsilon_1 \gg |\lambda + s_*|$ для всех значений параметра s_*). Тогда выражения для C_1, C_2 упрощаются и трансформанты $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ принимают вид

$$\bar{u} = \frac{1}{s} K_0\left(r\sqrt{\frac{s\,(\varepsilon_2 s\tau + 1)}{\varkappa\,(s\tau + 1)}}\right) - \frac{\varepsilon_1 \tau}{(s\tau + 1)^2} K_0\left(r\sqrt{\frac{s\tau + 1}{\varepsilon_1 \varkappa\tau}}\right), \tag{26.15}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{\varepsilon_2 s\tau + 1}{s\,(s\tau + 1)} K_0\left(r\sqrt{\frac{s\,(\varepsilon_2 s\tau + 1)}{\varkappa\,(s\tau + 1)}}\right) + \frac{\tau}{s\tau + 1} K_0\left(r\sqrt{\frac{s\tau + 1}{\varepsilon_1 \varkappa\tau}}\right),$$

что соответствует скважине нулевого радиуса. Известны формулы операционного исчисления [207]:

$$\frac{s}{s - \beta} f\left(\frac{s - \beta}{\alpha}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{\beta t} \varphi(\alpha t),$$

$$\left(s + \frac{1}{s}\right)^{-1} f\left(s + \frac{1}{s}\right) \bullet\!\!-\!\!\circ \int_0^t J_0\left(2\sqrt{(t - t_1)\,t_1}\right) \varphi(t_1)\, dt_1,$$

$$\frac{1}{s} f(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \int_0^t \varphi(t_1)\, dt_1,$$

если $f(s)$ является изображением по Лапласу — Карсону функции $\varphi(t)$ (в отличие от изображений по Лапласу — см. стр. 238).

Используя эти формулы, нетрудно найти сами функции u_1, u_2 по их изображениям $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= F_1(r,\ t) + \frac{1}{\tau}\int_0^t F_1(r,\ z)\,dz - \frac{\varepsilon_1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} F_2(r,\ t) \\ u_1 &= \varepsilon_2 F_1(r,\ t) + \frac{1}{\tau}\int_0^t F_1(r,\ z)\,dz + \mathrm{e}^{-t/\tau} F_3(r,\ t) \end{aligned}\right\}, \qquad (26.16)$$

$$\left.\begin{aligned} F_1(r,\ t) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\int_0^1 I_0\left(2\,\frac{t}{\tau}\sqrt{\frac{z(1-z)}{\varepsilon_2}}\right)\times \\ &\qquad \times\exp\left(-\frac{tz}{\varepsilon_2\tau} - \frac{\varepsilon_2 r^2}{4\varkappa t z}\right)\frac{dz}{z} \\ F_2(r,\ t) &= \frac{t}{r}\sqrt{\varepsilon_1\varkappa t}\exp\left(-\frac{r^2}{8\varepsilon_1\varkappa t}\right) W_{-\frac{3}{2},\,0}\left(\frac{r^2}{4\varepsilon_1\varkappa t}\right) \\ F_3(r,\ t) &= \frac{1}{r}\sqrt{\varepsilon_1\varkappa t}\exp\left(-\frac{r^2}{8\varepsilon_1\varkappa t}\right) W_{-\frac{1}{2},\,0}\left(\frac{r^2}{4\varepsilon_1\varkappa t}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (26.17)$$

где $W_{p,q}$ — функция Уиттекера [42, 207]; I_0, K_0 — функции Бесселя первого и второго рода мнимого аргумента [42, 207].

Это решение было построено Э. А. Авакян [1]; оно соответствует точечному стоку (источнику) в трещиноватой пористой среде ($r_c \to 0$), и условие равенства давлений p_1, p_2 следует при этом понимать как условие совпадения их асимптотических представлений. При $t \sim \tau$ (этому в изображениях соответствует $s\tau \sim 1$), $r \sim \varkappa\tau$ решение (26.16) можно упростить, воспользовавшись условиями $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{s\,(s\tau+1)}\,K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{\varkappa\,(s\tau+1)}}\right), \qquad (26.18)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{s}\,K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{\varkappa\,(s\tau+1)}}\right), \qquad (26.19)$$

что соответствует следующим решениям в оригиналах:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\tau}\int_0^t F_0(r,\ z)\,dz \\ u_2 &= F_0(r,\ t) + \frac{1}{\tau}\int_0^t F_0(r,\ z)\,dz \end{aligned}\right\}, \qquad (26.20)$$

$$F_0(r,\ t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\int_0^\infty I_0\left(2\sqrt{\frac{t}{\tau}}\,z\right)\exp\left(-z - \frac{r^2}{4\varkappa t z}\right)\frac{dz}{z}.$$

Решение (26.20) может быть представлено [1] следующими быстросходящимися рядами:

$$p_1 = p_0 - \frac{Q_0\mu}{2\pi kh}\left\{K_0(\xi)\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu\xi^\nu K_\nu(\xi)\,a_\nu\left(\frac{t}{\tau}\right)}{2^\nu(\nu!)^2}\right\},$$

$$p_2 = p_0 - \frac{Q_0\mu}{2\pi kh}\left\{K_0(\xi)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\xi^\nu K_\nu(\xi)\,a_{\nu-1}\left(\frac{t}{\tau}\right)}{2^\nu(\nu!)^2}\right\},$$

$$a_0 = 1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),\quad a_\nu = \nu a_{\nu-1} - \left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),\quad \xi = \frac{r}{\sqrt{\varkappa\tau}}.$$

Заметим, что решение в изображениях (26.18) было выписано в работе [18] — см. также исправление [11, 74]. Здесь нужно подчеркнуть следующее: решение (26.16) есть решение системы (26.1) типа мгновенно включенного точечного источника при условии $p_1 = p_2 = p_0$, $t = 0$, а решение (26.20) соответствует упрощенной системе (22.5) при начальном условии $p_1 = p_0$, $t = 0$ для давления в первичных порах (блоках) и при граничном условии для потока и давления во вторичных порах (трещинах).

Случай 2. Радиус скважины r_c всегда гораздо больше ширины зоны резкого изменения p, т. е.

$$\varepsilon_1 \ll \left|\frac{r_c^2}{\varkappa\tau}+\frac{r_c^2}{\varkappa}s\right| = \lambda + s_*.$$

При этом общее решение (26.13), (26.14) также можно упростить, полностью пренебрегая проницаемостью системы блоков:

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{s_*}\,\frac{K_0\left(R\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s+\lambda}}\right)}{\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}\,K_1\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}\right)},\quad R\geqslant 1, \tag{26.21}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{s_*}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 s_*+\lambda}{s_*(s_*+\lambda)}}\,\frac{K_0\left(R\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}\right)}{K_1\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}\right)}+$$

$$+\frac{\tau\lambda K_0\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}\right)}{\sqrt{(s_*+\lambda)\,s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}\,K_1\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}\right)}\cdot\frac{K_0\left(R\sqrt{\frac{s_*+\lambda}{\varepsilon_1}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{s_*+\lambda}{\varepsilon_1}}\right)}. \tag{26.22}$$

Для области вдали от скважины $R \gg 1$ решение (26.21), (26.22) еще больше упрощается

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{s_*} K_0\left(R\sqrt{\frac{s_2(\varepsilon_2 s\tau+1)}{s\tau+1}}\right),$$

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{s_*}\frac{\varepsilon_2 s_*+\lambda}{s_*(s_*+\lambda)} K_0\left(R\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}\right) \tag{26.23}$$

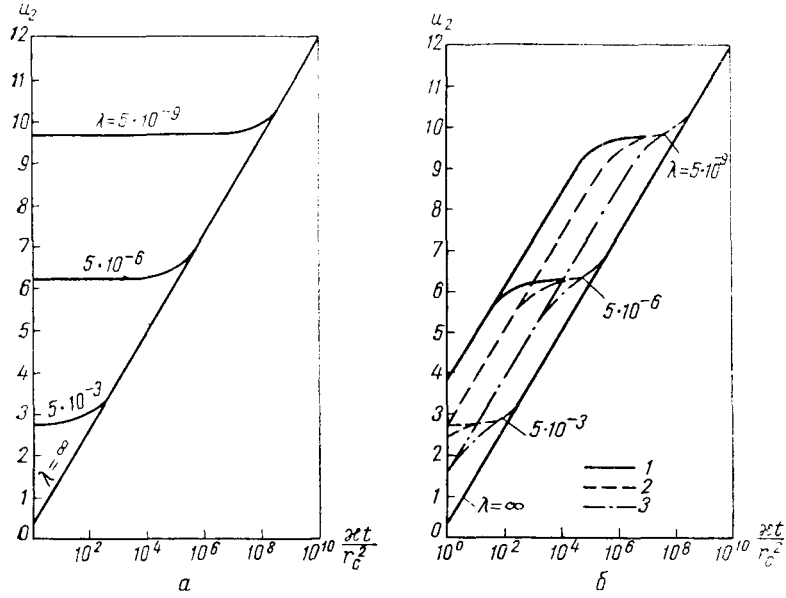


Рис. 32. Зависимость безразмерного давления $\bar{u}_2$ (r_c, t) от параметров $\lambda = r_c^2/\varkappa\tau$, $\omega = \varepsilon_2(1+\varepsilon_2)^{-1}$:

а — $\omega = 0$; *б*: *1* — $\omega = 0{,}001$; *2* — $\omega = 0{,}01$; *3* — $\omega = 0{,}1$.

и совпадает с решением для точечного источника в моменты времени $t \sim \tau$ — см. формулы (26.18) — (26.19). Решение (26.23) было предложено в работе [324], причем для оригиналов было дано асимптотическое представление для безразмерного давления в трещинах u_2 на стенке скважины ($R = 1$):

$$u_2(r_c, t) \approx \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\frac{\varkappa t}{r_c^2}\right) + 0{,}80908 + Ei\left[-\frac{t(1+\varepsilon_2)^2}{\tau\varepsilon_2}\right] - \right.$$
$$\left. - Ei\left[-\frac{t}{\tau}\frac{1+\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right]\right\}, \tag{26.24}$$

где $-Ei[-z] = \int\limits_z^\infty \frac{\exp(-u)\,du}{u}$ — экспоненциальный логарифм.

Там же приведено решение для конечного кругового пласта с непроницаемыми внешними границами (при $R = \frac{r}{r_c} = R_k$)

$$u_2(r_c, t) \simeq \frac{2}{R_к^2 - 1}\left[\frac{1}{4} + \frac{\varkappa t}{r_c^2} + \frac{\varkappa\tau}{r_c^2}\frac{1}{(1+\varepsilon_2)^2}\left\{1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau}\frac{\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_2)^2}\right]\right\} - \right.$$
$$\left. - \frac{3R_к^4 - 4R_к^4 \ln R_к - 2R_к^2 - 1}{4(R_к^2 - 1)^2}\right]. \qquad (26.25)$$

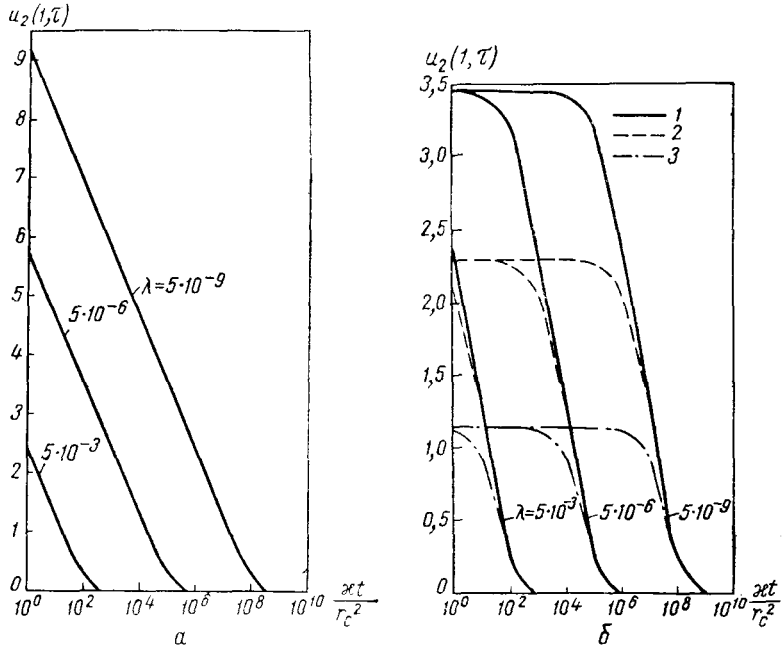


Рис. 33. Графики зависимости возмущения безразмерного давления u_2 (r, t) от безразмерного времени $\varkappa t/r_c^2$:

а — $\omega = 0$; *б*: *1* — $\omega = 0{,}001$; *2* — $\omega = 0{,}01$; *3* — $\omega = 0{,}1$.

Для ряда имеющих практический смысл значений параметров $\lambda = r_c^2/\varkappa\tau$ и $\omega = \varepsilon_2/(1 + \varepsilon_2)$ по приближенной формуле (26.24) были проведены расчеты. Графики зависимости безразмерного давления в трещинах на стенке скважины u_2 (r_c, t) от безразмерного времени $\varkappa t/r_c^2$ приведены на рис. 32. На рис. 33 показаны графики зависимости возмущения (обусловленного конечным временем релаксации τ) давления u_2 (r_c, t) от безразмерного времени.

Значение $\lambda = \infty$ соответствует мгновенному выравниванию давлений в первичных и вторичных порах: $\tau = 0$. В соответствии с общим анализом, проведенным в § 22, в условиях полного пренебрежения сжимаемостью системы трещин ($\varepsilon_2 = 0$) возмущение u_2 изменяется скачком при $t = 0$ (волна давления в трещинах проходит мгновенно), а затем монотонно.

Из графиков рис. 32, *а* также видно, что кривая u_2 (r_c, t) выходит на прямую линию, соответствующую обычному упругому режиму пласта примерно при $t = \tau$.

Согласно данным рис. 32, *б* начальное изменение давления обусловлено отличным от нуля значением ε_2, причем примерно со значений $\varkappa t/r_c^2 \sim \dfrac{\varepsilon_2}{\lambda}$ решение выходит на режим, соответствующий условию $\varepsilon_2 = 0$ (см. рис. 32, *а* и 32, *б*).

Однако в реальных условиях характер изменения забойного давления после внезапного пуска может быть еще более сложным. В самом деле, согласно оценкам, приведенным в качестве примера в книге [8] (*стр. 161*), раскрытию трещины в 0,1 *мм* соответствует ее эффективная проницаемость $k = 830$ *д*. Отсюда при проницаемости блоков $k = 1;\ 10;\ 100$ *мд* имеем соответственно оценки $\varepsilon = 10^{-6} \div 10^{-4}$. Сопоставление с принятыми в работе [324] значениями $\lambda \approx \approx 5\,(10^{-9} \div 10^{-3})$ говорит о том, что на забойном давлении в скважине в рассматриваемые интервалы времени $\left(\dfrac{\varkappa t}{r_c^2} < \dfrac{1}{\varepsilon_1},\ \varepsilon_1 > \dfrac{r_c^2}{\varkappa}\ s = s_* + \lambda\right)$ будет существенно сказываться наличие малой, но ненулевой проницаемости блоков.

Отметим в заключение развитые приближенные методы решения задач неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористых пластах — метод моментных соотношений и метод коллокаций[1]. Следует подчеркнуть, однако, что применение здесь метода моментных соотношений, строго говоря, требует введения двух характерных зон изменения давления (см. стр. 205—208).

---

[1] Э. А. Авакян. Некоторые приближенные решения задач фильтрации в трещиновато-пористой среде. Изв. АН СССР, серия «Механика жидкостей и газа», 1967, № 4.

Глава VII

УСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК К СКВАЖИНАМ

§ 27. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ СКВАЖИН НА СТАЦИОНАРНЫЙ ПРИТОК

Работы по исследованию нефтяных скважин методом установившихся отборов отражены в монографиях [209, 233 и др.].

Методика исследования скважин данным методом довольно проста [92, 233] и состоит в следующем. Каким-либо возможным с технической точки зрения способом скважину пускают в эксплуатацию. При этом измеряют забойное давление и дебит скважины. Забойное давление p_c измеряют при нескольких значениях (обычно шести-восьми) установившегося (после стабилизации) дебита скважины (технически это осуществляется путем постоянного увеличения диаметров штуцеров). Величина давления в закрытой скважине интерпретируется как пластовое давление $p_{пл}$. Основной результат измерений — индикаторная линия, т. е. график зависимости дебита скважины от перепада давления: $\Delta p = p_{пл} - p_c$ (депрессии на пласт).

Обычно предполагается, что при каждом установившемся отборе в пласте реализуется стационарное течение жидкости, которому соответствует формула [227, 242] или же ее видоизменения (см. § 23) для нелинейно-упругого режима фильтрации. Формула Дюпюи связывает между собой забойное и контурное давления, дебит и радиус контура питания. При этом для вычисления, например, дебита задаются забойным давлением, а давление и радиус контура питания, по предположению, — величины постоянные, остаются в пласте с непроницаемыми границами или в бесконечном пласте неопределенными.

В работах [92, 233] рекомендуется использовать в этих случаях в качестве радиуса контура питания половину расстояния между скважинами. Однако следует различать условный радиус влияния, радиус дренажа и приведенный радиус влияния скважины, каждый из которых должен использоваться для различных целей.

Условным радиусом влияния скважины $R_у$ будем называть радиус, на котором отношение текущего давления, вызванного работой скважины с дебитом Q, к начальному давлению является наперед заданной величиной $\delta = \frac{p_т}{p_0}$. Величина δ может определяться как условиями задачи, так и техническими условиями, например чувствительностью и точностью измерительной техники.

В работе [243] дается следующая функциональная зависимость между $R_у$ и временем:

$$R_у^2 = \varkappa t F\left[\frac{\pi k h p_0 (1-\delta)}{Q\mu}\right], \qquad (27.1)$$

где F — функция, определяемая параметрами пласта, дебитом и величиной δ.

Для фильтрации газа формула (27.1) принимает вид

$$R_у^{*2} = \tau f\left[\frac{1-\delta^2}{Q^*}\right], \quad f = 4F,$$

$$Q^* = \frac{2\mu p_{ат} T_{пл^z}}{\pi k h p_0^2 T_{ст}} Q, \quad \tau = \frac{k p_0 t}{2m\mu R_к^2} = \frac{\varkappa}{2R_к^2} t, \quad R_у^* = \frac{R_у}{R_к}. \qquad (27.2)$$

Для нахождения вида функции $f(z)$ можно воспользоваться указанным выше решением задачи о неустановившемся притоке к внезапно включенной с постоянным дебитом ($Q^* = \text{const}$) центральной скважине в круговом пласте с непроницаемой внешней границей [125]. Полученная для значений $Q^* = 0{,}005 \div 0{,}5$; $\delta = 0{,}99 \div 0{,}999$ зависимость $f(z)$ хорошо аппроксимируется формулой $f(z) = (0{,}06 + 3{,}6\,z)^{-1}$. Подставляя это соотношение в выражение (27.2), получим в удобном для практического использования представлении

$$R_у^2 = \frac{6\varkappa t}{1 + 0{,}81\,(1-\delta^2)\dfrac{kh}{\mu}\dfrac{p_0^2}{p_{ат}}\dfrac{1}{Q}}, \qquad (27.3)$$

где приняты следующие размерности: $[R_у]$ — в *м*; $[\varkappa]$ — в *см²/сек*; $[t]$ — в *ч*; $[k]$ — в *д*; $[\mu]$ — в *спз*; $[h]$ — в *м*; $[p]$ — в *ат*; $[Q]$ — в тыс. *м³/сутки*.

Величины пьезопроводности $\varkappa$ и проводимости kh/μ пласта могут быть оценены по данным исследованных образцов породы пласта или определены по результатам обработки кривых нарастания давления (см. ниже § 30). Если известна только величина проводимости пласта kh/μ, то можно определить условный объем области дренирования пласта данной скважины из следующего выражения:

$$V_у = \pi m h R_у^2 = 18{,}8\,\frac{\dfrac{kh}{\mu} p_0}{1 + 0{,}81\,(1-\delta^2)\dfrac{kh}{\mu}\dfrac{p_0^2}{p_{ат} Q}}\, t. \qquad (27.4)$$

Рассмотрим пример, в котором задаются следующие исходные данные: $\frac{kh}{\mu} = 20$ *дсм/спз*; $mh = 3$ *м*, $p_0 = 235$ *ат*, $\varkappa = 1570$ *см²/сек*, $\delta = 0{,}999$, $\delta^2 = 0{,}998$, $1 - \delta^2 = 0{,}002$. Рассчитаем по формуле (27.8) изменение R_y во времени для двух дебитов: $Q_1 = 400$ тыс. *м³/сутки* и $Q = 800$ тыс. *м³/сутки*. Результаты расчетов приведены в табл. 21.

Таблица 21

Дебит скважины, тыс. *м³/сутки*	Условный радиус влияния R_y (в *м*) при t (в *ч*)					
	2	4	8	10	20	40
400	59	83	117	131	185	262
800	76	108	152	171	241	341

Как видно из данных табл. 21, изменение дебита скважины не очень существенно сказывается на величине R_y. Пусть далее известно, что можно замерить падение давления с точностью не менее 0,235 *ат*, а максимальный дебит скважины 800 тыс. *м³/сутки* (см. табл. 21). Тогда на реагирующей скважине, находящейся на расстоянии 1 *км*, падение давления в 0,235 *ат* будет зафиксировано через 344 *ч* (около 15 суток) работы скважины с дебитом газа в 800 тыс. *м³/сутки*.

Следует отметить, что на основе аналитического исследования линейного уравнения пьезопроводности Г. Б. Пыхачев [184] для фильтрации упругой жидкости предлагает формулу

$$R_y = \left[0{,}6 \ln \frac{\Delta p_c}{p_0 (1-\delta)} - 1\right] \sqrt{\varkappa t}, \qquad (27.5)$$

где $[R_y]$ — в *м*; Δp_c — установившаяся депрессия при работе скважины.

Формула, предложенная Мак-Робертсом [306] для фильтрации газа, имеет вид

$$t = \frac{R_y^2 a}{(p_{пл}^2 - p_c^2)} \left[1 - \frac{1}{2 \ln \frac{R_y}{R_c}}\right], \qquad (27.6)$$

где $(p_{пл}^2 - p_c^2)$ — разница квадратов пластового и забойного давлений при длительной работе скважины; R_c — радиус скважины; a — некоторая постоянная, зависящая от размерностей величин и заданной величины условного падения давления.

В литературе встречается и несколько иное определение условного радиуса влияния скважины. Так, в работе Тека и др. [317] под термином R_y понимается радиус контура, расход через который есть наперед заданная величина по отношению к дебиту скважины. Пусть это отношение составляет $\beta = Q_y/Q$. Тогда формула для R_y примет вид

$$R_y^2 = 4 \varkappa t \ln \frac{1}{\beta}. \qquad (27.7)$$

Если $\beta = 0{,}01$ (как это принято у Тека и др.), то из формулы (27.7) получим $R_y^2 = 18{,}4\,\varkappa t$. При таком определении R_y не зависит от дебита скважины, а определяется только величиной коэффициента пьезопроводности $\varkappa$.

Многочисленными исследованиями и наблюдениями за разработкой месторождений и расчетами установлено, что при работе системы скважин через определенный промежуток времени около каждой скважины образуется своя дренажная область, ограниченная нейтральными, как бы непроницаемыми линиями. При этом *радиусом дренажа скважины* будет называться радиус цилиндра, эквивалентного по объему дренажной области скважины.

В работе [84] была рассмотрена задача о совместной работе центральной скважины и батареи скважин на границе пласта. Оказалось, что условный радиус влияния скважины, соответствующий заданию $\delta = 0{,}9999$, в точке $\bar{R} = 0{,}49$ (где $\bar{R} = r/R_б$, $R_б$ — радиус батареи) встречается с условным радиусом влияния батареи через промежуток времени $t = 0{,}016\,\frac{R_б^2}{\varkappa}$, после чего образуется самостоятельная область дренажа скважины с радиусом $R_{др}$. Размеры этой области через время $t = 0{,}08\,\frac{R_б^2}{\varkappa}$ практически становятся неизменными. Стационарный радиус дренажа $R_{др}$

$$R_{др}^2 = R_б^2\,\frac{Q_с + Q_б R_с^2}{Q_с + Q_б} \tag{27.8}$$

(здесь $Q_с$ — дебит скважины; $Q_б$ — дебит батареи) делит весь пласт на дренажные зоны с объемами, пропорциональными отборам из этих зон.

В реальных условиях батарея, окружающая скважину, находится не на границе пласта, поэтому дебит из зоны дренажа, соседней со скважиной, будет меньше, чем полный дебит батареи. Условно можно считать, что он будет равен половине полного дебита (для более строгого определения этой величины следует привлечь результаты работ [128]), тогда будем иметь

$$R_{др}^2 = R_б^2\,\frac{Q_с}{Q_с + 0{,}5Q_б}, \tag{27.9}$$

где $R_б$ — среднеарифметическое из расстояний до соседних скважин; $Q_б$ — суммарный дебит соседних скважин.

Заметим, что $R_{др} = 0{,}5\,R_б$ только тогда, когда дебиты скважин одинаковы, а сами скважины расположены по шестиугольной сетке.

Изменение объема дренажа данной скважины во времени можно фиксировать следующим образом. Для каждой скважины строят зависимость $p_{пл}/z$ (z — коэффициент сверхсжимаемости) от добытого количества газа. Если эта зависимость прямолинейна, то объем дренажа постоянен, а использование уравнения материального баланса для данной зоны позволяет оценить ее размеры.

При построении решения методом моментных соотношений (см. § 25) весь пласт делят на возмущенную и невозмущенную зоны, граница между которыми непрерывно перемещается. При любом задании распределения давления в возмущенной зоне связь дебита с перепадом давления (функции Лейбензона) представляется в виде $\Delta p = aQ$, причем коэффициент a зависит от изменяющегося во времени радиуса возмущенной зоны. Будем называть эту возмущенную зону *приведенной областью влияния скважины.*

Потери давления в этой области, рассчитанные по стационарным формулам, равны потерям давления при нестационарной фильтрации во всем пласте. Радиус этой зоны называется *приведенным радиусом влияния скважины* $R_{пр}$, он не зависит от дебита скважины и определяется только пьезопроводностью

$$R_{пр}^2 = \varepsilon \varkappa t. \tag{27.10}$$

Величина безразмерного коэффициента ε зависит от способа задания распределения давления в приведенной области влияния скважин: при решении нелинейного уравнения фильтрации газа методом линеаризации $\varepsilon = 2{,}25$; по методу «осреднения» [56] — $\varepsilon = 2{,}94$; по методу А. М. Пирвердяна [180] $\varepsilon = 1{,}5$; по методу моментов [88], когда распределение давления задано в виде многочлена из семи членов, $\varepsilon = 2{,}05$; по методу Э. Б. Чекалюка [230] — $\varepsilon = 3{,}14$.

В табл. 22 приведена зависимость $R_{пр}$ от времени, рассчитанная по формуле (27.10) при $\varepsilon = 2{,}25$ и $\varkappa = 1570$ *см²/сек.*

Таблица 22

t, *ч*	2	4	8	10	20	40
$R_{пр}$, *м*	50	71	100	113	159	226
$R_у$, *м*	59	83	117	131	185	262

Для сопоставления в этой же таблице показаны значения $R_у$ для дебита 400 тыс. *м³/сутки*, взятые из табл. 21.

Если условный радиус влияния скважины определять как радиус границы, через которую расход составляет 0,01 от дебита скважины, то получаемая при этом формула (27.7) идентична формуле (27.10) при $\varepsilon = 18{,}4$. Из формулы (27.10) также получаем, что для $\varepsilon = R^2/\varkappa t = 2{,}25$ величина $\beta = Q_у/Q = 0{,}57$. Таким образом, в действительности через окружность с радиусом $R_{пр}$ протекает расход газа, равный 0,57 от дебита скважины.

Замеряемая на скважинах индикаторная линия может быть описана аналитически при помощи формулы $\Delta p = aQ$, причем коэффициент a может зависеть от времени работы на данном режиме. Из практики исследования скважин известно, что через определенный

промежуток времени, называемый *периодом стабилизации*, коэффициент a становится неизменным. В высокопроницаемых пластах период стабилизации относительно мал. В низкопроницаемых пластах он может быть весьма большим, часто гораздо больше времени проведения испытаний скважин; способ расшифровки замеряемых в этих условиях данных приведен в § 28.

Стабилизацию притока к скважине можно интерпретировать как остановку увеличения приведенного радиуса скважины. В работе [300] было установлено, что $R_{пр}$ становится постоянным с того момента времени, когда он достигнет половины расстояния до границ области дренирования [1] или пласта

$$R_{пр.\ уст} = \frac{1}{2} R_{др}. \tag{27.11}$$

Из формулы (27.11) видно, что на место $R_к$ надо подставлять не величину $R_{др}$ (как это делается,) а $R_{др}/2$. Впрочем, поправка для дебита будет не слишком существенна, поскольку величина $R_к$ входит под знак логарифма.

Из формулы (27.11) можно найти формулу для определения периода стабилизации (при $\varepsilon = 2{,}05$)

$$t_{ст} = 0{,}122 \frac{R_к^2}{\varkappa}. \tag{27.12}$$

Ранее в литературе приводились приближенные формулы для определения времени стабилизации. Так, Кристеа [111] рекомендует формулу $t_{ст} = 0{,}35\, R_к^2/\varkappa$, тогда как по Чатасу [269] $t_{ст} = 0{,}25\, R_к^2/\varkappa$.

В табл. 23 приведены значения периодов стабилизации для различных значений $\varkappa$ и $R_к$, рассчитанные по формуле (27.12)

Таблица 23

$\varkappa$, см²/сек	$t_{ст}$ (в ч) при $R_к$ (в м)				
	100	200	300	400	500
100	34,0	136,0	306,0	544,0	850,0
1 000	3,4	13,6	30,6	54,4	85,0
10 000	0,34	1,36	3,06	5,44	8,5
50 000	0,07	0.28	0,6	1,1	1,7

Встречаются три основных вида *индикаторных линий* [2] — прямые, выпуклые и вогнутые по отношению к оси дебитов, если по

[1] На практике $R_{пр}$ часто интерпретируется как половина расстояния между скважинами.

[2] Зависимость G_0—Δp также называют индикаторной линией, индикаторной кривой или индикаторной диаграммой.

другой оси отложено давление (квадрат давления для газовых скважин).

Прямые индикаторные линии соответствуют линейной теории упругого режима фильтрации (или фильтрации идеального газа) — см. уравнения (23.2). Угловой коэффициент жидкости этой прямой K в координатах $Q - \Delta p$ (для однородной жидкости) называется *коэффициентом продуктивности скважины.*

В силу предположения о существовании радиуса влияния $R_{др} = R_к = r$ и давления p_0, постоянных при изменениях величины G, прямые индикаторные линии (линейная связь $G = K\Delta p$) означают неизменность величины гидропроводности пласта kh/μ.

Можно думать, что *выпуклые* индикаторные линии соответствуют уменьшению (с ростом отбора G) гидропроводности пласта, а *вогнутые* — увеличению этого параметра k/μ.

В ряде исследований установившегося притока однородной жидкости к скважинам отмечалось существование более сложных индикаторных линий — прямолинейных в некотором интервале значений дебитов и искривляющихся (в ту или другую сторону) с дальнейшим ростом интенсивности отбора (нагнетания). Форма индикаторных линий является критерием применимости закона Дарси (в его обычной линейной форме) для описания процесса в нефтяных и газовых пластах.

Основными причинами отклонения от закона Дарси при фильтрации жидкости и газов в пористых средах в настоящее время считаются: зависимость свойств пласта и жидкости от изменения давления, наличие начального градиента давления в пласте, возрастание фильтрационных сопротивлений, связанных с инерцией при больших скоростях, что может иметь место в призабойной зоне работающих скважин.

Вогнутые индикаторные линии, получающиеся при отборе жидкости, ранее считали результатом некачественного проведения измерений и, как правило, их браковали. В настоящее время ряд исследователей объясняют эффект роста проницаемости (вогнутые индикаторные линии) тем, что при увеличении градиента давления мелкие поры начинают пропускать через себя жидкость, при этом предполагается, что существует зависящий от размера поры и состава жидкости критический градиент давления — движение начинается только после появления градиента давления, большего, чем этот критический. В нефтесодержащих коллекторах часто имеются целые малопроницаемые (мелкопористые) пропластки.

В этих условиях изменению градиентов давления соответствуют изменения не только проницаемости, но и работающей мощности пласта. Вогнутые индикаторные линии действительно весьма часто наблюдаются именно на заведомо многопластовых месторождениях. Однако к предположению о включении не работавших ранее пропластков следует отнестись с осторожностью, поскольку, во-первых, техника, фиксирующая эффект увеличения работающей мощности пласта — зондирование пласта глубинными дебитомерами,

как известно, еще весьма далека от совершенства и нельзя полностью полагаться на получаемые с ее помощью данные, а, во-вторых, как показано в работе [89], наличие прослоев даже при реализации обычного закона Дарси существенно сказывается на форме индикаторных линий.

В работе [96] приведены результаты исследований нагнетательных и эксплуатационных скважин Туймазинского месторождения, в ходе которых одновременно снимали профиль приемистости скважин.

Оказалось, что при работе скважин с малыми расходами воды (т. е. при малых градиентах давления) отдельные малопроницаемые пропластки не принимали воду. С повышением расходов «рабочая» мощность пласта увеличивалась. Обработка, правда по не соответствующей данному случаю линейной теории, кривых восстановления давления, снятых после работы скважин при различных забойных давлениях, дала разные значения коэффициента проводимости пласта — см. также [64].

Вогнутый характер индикаторных линий эксплуатационных скважин Ромашкинского нефтяного месторождения в работе [132] также связывают с эффектом выключения малопроницаемых пропластков при изменениях градиентов давления.

Индикаторные линии ряда скважин месторождения Котур-Тепе, эксплуатирующих большие нефтенасыщенные мощности (50—80 *м*) или несколько пропластков, разобщенных между собой глинистыми перемычками, на участках, соответствующих малым депрессиям на забое (до 5 *ат*), имеют вогнутость к оси дебитов.

В табл. 24 приведены результаты исследования на приток с помощью глубинного дебитомера.

Таблица 24

Диаметр штуцера, *мм*	$p_{пл}$, *ат*	$p_з$, *ат*	Δp, *ат*	Дебит пропластков, *т/сутки*						Суммарный дебит, *т/сутки*
				I	II	III	IV	V	VI	
3	211,3	210,0	1,3	0	0	0	18	3,5	7	28,5
5	211,3	203,3	2,4	0	0	0	36	11,0	13	60
10	211,3	205,7	5,6	23	46,5	60,0	84	56,5	56	270
12	211,3	205,0	6,3	43	65,0	72,5	—	—	—	340
13	211,3	204,3	7,0	64	85,0	85,0	—	—	—	403

Теоретические исследования фильтрационных потоков с начальным критическим градиентом давления известны в связи с изучением движения воды в глинистых грунтах, и в частности в теории консолидации [214]. Действительно, в этом случае вода приобретает свойства глинистого раствора, являющегося типичным примером вязко-пластической жидкости и обладающего жидкостными свойствами.

Характерные черты таких фильтрационных потоков изучал румынский ученый Георгице [296], который в одной из работ [295] дополнил наличие начального градиента давления эффектом необратимости нелинейного закона фильтрации.

Промысловые и лабораторные исследования показывают, что пропускная способность призабойной части пласта может существенно изменяться во времени из-за осаждения асфальтенов, смол, парафина и других тяжелых компонент сырых нефтей (особенно при изменениях теплового режима). Поэтому при расшифровке индикаторных линий важно знать, как они ведут себя и с течением времени (как правило, коэффициент продуктивности уменьшается). Для анализа характера притока к скважине в этих случаях необходимо пользоваться более сложной моделью неоднородной (в физико-химическом отношении) жидкости.

Накопленный промысловый опыт показывает, что именно в призабойной части пласта выпадают тяжелые углеводороды из нефти: весьма часто после прогрева призабойной части или закачки солярового масла дебиты скважин увеличивались в несколько раз.

С другой стороны, по экспериментальным данным нефтепроницаемость песков существенно зависит от перепадов давления, а именно: расход нефти растет быстрее, чем перепад давления [208].

Однако при изменениях градиента давления в фильтрационном потоке воздуха, углеводородных соединений (тетрихлорид, циклогексан, бензин) проницаемость породы практически не изменяется [282]. Исключением является фильтрация воды и особенно ее солевых растворов.

Выпуклые индикаторные линии на практике обрабатывают по двучленной формуле

$$\Delta p = (G/K) + bG^2, \quad b > 0, \tag{27.13}$$

причем первый член (по предположению) определяет вязкостные потери, а второй — инерционные. В отличие от вогнутых линий такие индикаторные линии ранее не считались дефектными, поскольку для них было найдено физически допустимое объяснение, а именно: кривизна линии связывалась с проявлениями инерционных сил сопротивления при больших скоростях движения. Однако нарушения закона Дарси из-за проявления инерционных сил, по-видимому, не могут служить единственным объяснением выпуклых индикаторных линий.

Более того, есть основания считать, то при отборе капельной жидкости из скважины, вскрывающей обычный пористый пласт, интегральный эффект инерционных сил незначителен. Этот эффект может быть более существенным для газовых скважин, где депрессия давления концентрируется в ближайшей окрестности скважин или для скважин, вскрывающих трещиноватый пласт.

Если представлять общую связь между градиентом давления и скоростью в виде $\operatorname{grad} p = -(\mu/k)\, f(\mathrm{Re})\, \vec{w}$ (где $f(\mathrm{Re})$ — безразмерная

функция числа Рейнольдса [8], см. также § 17), то формулу для притока жидкости к скважине можно представить в виде [24]

$$Q=\frac{2\pi kh}{\mu}(p_0-p_c)\left\{\ln\frac{R_к}{r_c}+\varphi(\mathrm{Re}_c)\right\}^{-1},\quad \varphi(\mathrm{Re}_c)=\int\limits_0^{\mathrm{Re}_c}\frac{f(\mathrm{Re})-1}{\mathrm{Re}}\,d\,\mathrm{Re}_c, \tag{27.14}$$

где Re_c — число Рейнольдса для потока на стенке скважины.

Функция $\varphi(\mathrm{Re}_c)$ вычислялась для образцов горных пород, испытанных Фенчером, Льюисом и Бернсом [211]. Характеристика этих пород приведена в табл. 25.

Таблица 25

№ образца	m	k, 10^{-10} $см^2$	Re_+	Q_+, $м/сутки$	$Q_+^н$, $м/сутки$
9	0,119	115,0	0,045	2 330	980
7	0,197	18,6	0,020	5 460	2310
8	0,159	35,7	0,030	11 500	4840
14	0,192	14,2	0,026	6 850	3300
20	0,269	255,0	0,100	11 850	5000
22	0,221	346,0	0,170	12 800	5390

Проведем оценочный расчет. Пусть пласт сложен из указанных пород, причем $r_c = 0{,}1$ $м$, $h = 10$ $м$, $\mu = 2{,}5$ $спз$, $\rho = 0{,}85$ $г/см^3$. Тогда критический дебит скважины Q_+, соответствующий условию равенства числа Рейнольдса Re_c критическому значению Re_+, т. е. $\mathrm{Re}_c = \mathrm{Re}_+$, начиная с которого $\varphi(\mathrm{Re}_c) \neq 0$, можно подсчитать по формуле

$$Q_+=\frac{2\pi hr_c m\mu}{\rho\sqrt{k/m}}\mathrm{Re}_+=1{,}85\cdot 10^3\frac{m}{\sqrt{k/m}}\mathrm{Re}_+. \tag{27.15}$$

Результаты подсчетов, приведенные в табл. 25, показывают, что дебиты, при которых на стенке скважины достигается критическое число Рейнольдса, гораздо больше обычных (до 500—600 $м/сутки$) дебитов скважин.

В случае *несовершенной* скважины жидкость из пласта в скважину попадает через перфорационные отверстия в обсадной колонне (рис. 34). Будем считать, что приток жидкости к перфорационному отверстию эквивалентен притоку к полусфере, радиус которой равен радиусу отверстия и равен $Q^н/(n_1 h)$, где n_1 — число перфорационных отверстий на единицу длины. Площадь сечения потока в области перехода осесимметричного течения в потоки с центральной симметрией (к отдельным перфорационным отверстиям) более площади всей поверхности рассматриваемой скважины. Поэтому области асимметричного течения скорости фильтрации ниже критического значения, а именно, область центрально симметричного течения разделяется на две зоны, в первой из которых справедлив закон Дарси, а во второй сказываются отклонения от этого закона (см. рис. 34). Причем формула стационарного притока будет иметь вид

$$p_0-p_c=\frac{Q^н}{K_1}\left[1-\frac{\varphi_1(\mathrm{Re}_c)}{n_1\sqrt{C_2}\ln(R_к/r_c)}\frac{1}{\sqrt{Q^н}}\right]=\frac{Q^н}{K}z_R, \tag{27.16}$$

$$\varphi_1(\mathrm{Re}_2)=\int\limits_{\mathrm{Re}_+}^{\mathrm{Re}_2}\frac{f(\mathrm{Re})-1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\,d\,\mathrm{Re},\qquad C_2=\frac{\rho\sqrt{k}}{2\pi m^{2/3}hn_1\mu},$$

где Re_+ — значение числа Рейнольдса в перфорационном отверстии.

Таблица 26

$Q^{н} \cdot 10^5$, $см^3/сек$	z_R	$Q^{н} \cdot 10^5$, $см^3/сек$	z_R
0,149	1,0001	0,898	1,0735
0,299	1,0092	1,047	1,0910
0,448	1,0239	1,197	1,1090
0,598	1,0397	1,345	1,1270
0,748	1,0565	1,495	1,1440

Коэффициент продуктивности K_1 имеет более сложный вид, чем K в формуле Дюпюи вследствие несовершенства скважины, причем $K > K_1$.

Функция φ_1 (Re) снова вычислялась для тех случаев, когда пласт сложен из породы, образцы которой использовались в опытах Фенчера, Льюиса и Бернса [211]. Примем, что $n_1 = 10$ отверстий на 1 $м$ и радиус перфорационного отверстия $r_2 = 0{,}65$ $см$.

Тогда можно оценить критический дебит скважины $Q_{+}^{н}$ (табл. 25) по формуле

$$Q_{+}^{н} = \frac{2\pi r_2^2 hnm\mu}{\sqrt{k/m}\,\rho}\,\mathrm{Re}_{+} = 0{,}78 \cdot 10^3 \frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{k}}\,\mathrm{Re}_{+}. \qquad (27.17)$$

Наличие перфорационных отверстий несколько уменьшает величину критического дебита, однако обычный дебит скважины существенно ниже и этих критических значений.

В табл. 26 приведены результаты расчетов (при $m = 0{,}119$, $k = 115{,}0 \times 10^{-10} см^2$) поправки z_R по формуле (27.16) для дебитов скважины, бóльших, чем указанное критическое значение ($Q^{н} > Q_{+}^{н}$). Эти значения соответствуют выпуклым индикаторным линиям к оси дебитов, т. е. эффект инерционных сопротивлений не может служить объяснением вогнутых индикаторных линий. В самом деле, при нагнетании жидкости (воды) в пласт скорости в десятки и даже в сотни раз больше, чем при отборе, а поэтому из-за появления инерционных сил (если только они играют существенную роль) сопротивление должно было бы возрасти в большей степени. Тем не менее индикаторные линии нагнетательных скважин оказываются вогнутыми.

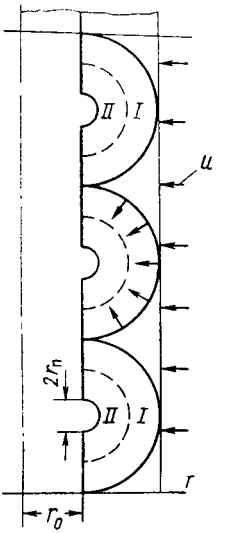


Рис. 34. Схема перфорационных отверстий в обсадной колонне.

Предположение о зависимости параметров пласта и жидкости от напряженного состояния коллектора позволяет дать индикаторным линиям следующее качественное объяснение. При отборе жидкости из пласта давление в нем падает, что вследствие постоянства горного давления приводит к возрастанию нагрузки на скелет пласта. При этом проницаемость и пористость пласта уменьшаются (индикаторные линии выпуклые). При нагнетании жидкости (воды) в пласт происходит обратный процесс — проницаемость и пористость увеличиваются (иногда изменения плотности и вязкости воды с давлением незначительны). С ростом давления вязкость μ увеличивается быстрее, нежели уменьшается проницаемость k; этот эффект

может служить объяснением вогнутых индикаторных линий при отборе и выпуклых — при нагнетании.

Наблюдаемые в ряде случаев резкие изломы индикаторных линий могут быть связаны с фазовыми переходами в жидкости (см. § 23), с переходом скелета пласта в пластическое состояние или же с его хрупким разрушением (образованием трещин). Рассмотрение этих эффектов выходит за рамки предпринимаемого здесь исследования.

Нелинейно-упругие эффекты особенно существенно проявляются на скважинах, вскрывших глубокозалегающие пористые коллекторы и коллекторы с трещиноватыми породами.

Месторождения Чечено-Ингушской АССР сложены из деформируемых трещиноватых пород; индикаторные линии скважин, в частности месторождения Карабулак-Ачалуки, выпуклы при отборе и, как правило, вогнуты при закачке жидкости. В работе [137] искривлению индикаторных линий на этих месторождениях дается традиционное объяснение — см. формулу (27.13); в работе [52] эти же данные трактовались с позиций нелинейно-упругих эффектов; в последнее время искривления индикаторных линий связывают с совместным действием двух указанных эффектов [136]. Для преодоления инерционных сопротивлений всегда необходимо создавать дополнительный перепад давления. Поэтому при отборах жидкости влияние инерционных сопротивлений суммируется с уменьшением проницаемости от давления, что приводит к значительному искривлению индикаторной линии. При нагнетании жидкости в пласт влияние этих факторов на величину расхода противоположное. Вследствие этого при нагнетании следует ожидать самых разнообразных форм индикаторных линий: прямых, выпуклых и вогнутых к оси дебитов.

Специальные исследования нагнетательных скважин на месторождении Карабулак-Ачалуки (скважины вначале работали на приток, а затем через них проводилось нагнетание) качественно подтвердили указанные следствия взаимодействия нелинейно-упругих и инерционных эффектов.

Были предложены две формулы для стационарного притока к скважине в условиях совмещения эффектов нелинейно-упругого деформирования и инерционных сопротивлений:

1) соответствующая линейной зависимости свойств коллектора от пластового давления [1]

$$\Delta p - \frac{\alpha}{r}(\Delta p)^2 = \frac{\mu \ln (R_к/r_с)}{2\pi k_0 h \rho_0} G + \frac{\beta}{4\pi^2 h^2 k_0 \rho_0 r_с} G^2, \qquad (27.18)$$

где $\alpha = a_p + a_к$; β — некоторый дополнительный параметр, характеризующий инерционные сопротивления в пласте;

---

[1] Л. Г. Наказная. К определению параметров чистотрещинного пласта по данным о неустановившейся фильтрации с учетом инерционных сопротивлений. Тр. МИНХ и ГП, вып. 66, М., изд-во «Недра», 1967.

2) соответствующая экспоненциальным связям (см. § 19) параметров с пластовым давлением [54]

$$G=\frac{2\pi k_0\rho_0 h}{\alpha\mu}\,\frac{u_к\exp(-B/R_к)-u_с\exp(-B/r_с)}{Ei(-B/R_к)-Ei(-B/r_с)}, \qquad (27.19)$$

$$u_к=\exp\{-\alpha(p_0-p_к)\},\quad u_с=\exp\{-\alpha(p_0-p_с)\},$$

$$B=\alpha l b G^2/(g\rho_0 4\pi^2 h^2),$$

где b — некоторый постоянный коэффициент.

Подчеркнем, что формулы (27.18), (27.19) соответствуют также различным трактовкам зависимости связи коэффициентов инерционных сопротивлений с проницаемостью среды.

§ 28. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ РАСШИФРОВКА ИНДИКАТОРНЫХ ЛИНИЙ

А. Формулу (2.3) для **притока к скважине капельной жидкости** представим в следующем виде:

$$G=K\Delta u,\quad \Delta u=\frac{1-e^{-\alpha(p_к-p_с)}}{\alpha}, \qquad (28.1)$$

$$K=\frac{2\pi k\rho h}{\mu\ln(R_к/R_с)},\quad \frac{k_0\rho_0}{\mu_0}e^{-\alpha(p_0-p_к)}=\frac{k\rho}{\mu}. \qquad (28.2)$$

Здесь k, ρ, μ — проницаемость, плотность и вязкость жидкости при текущем пластовом давлении $p_к$; K — текущий коэффициент продуктивности.

Для сопоставления коэффициентов продуктивности, измеренных на одной и той же скважине в разное время, необходимо сводить их к условному коэффициенту продуктивности, соответствующему начальному пластовому давлению p_0, по формуле

$$K_0=K\exp[\alpha(p_0-p_к)]. \qquad (28.3)$$

Если пересчитанные таким образом величины будут различны, то это свидетельствует о необратимых процессах, происшедших в призабойной зоне за рассматриваемые интервалы времени.

Коэффициент продуктивности скважины можно определить непосредственно, проведя касательную к индикаторной линии в точке $\Delta p=0$, т. е. при $p_0=p_с$. Однако, несмотря на кажущуюся простоту этого приема, воспользоваться им весьма затруднительно, так как на реальных индикаторных линиях обычно отсутствуют данные о притоке при малых перепадах Δp, а недостаточно точное проведение касательной может внести существенные погрешности.

Было предложено [49] определить величины α и K соответствующей индикаторной линии путем сопоставления отношения интегралов

$$F_1=\int_0^{\Delta p_1} G\alpha(\Delta p),\qquad F_2=G\,\Delta p_1,\quad \Delta p_1=p_к-p_с \qquad (28.4)$$

с табулированной (табл. 27) функцией

$$z = \frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{1 - \exp[-\alpha\,\Delta p]} - \frac{1}{\alpha\,\Delta p} \qquad (28.5)$$

Таблица 27

$\pm\alpha\,\Delta p$	Отбор z	Закачка z	$\pm\alpha\,\Delta p$	Отбор z	Закачка z
0,1	0,509	0,491	2,2	0,670	0,330
0,2	0,517	0,483	2,4	0,683	0,317
0,4	0,533	0,467	2,6	0,696	0,304
0,6	0,549	0,451	2,8	0,708	0,292
0,8	0,566	0,434	3,0	0,719	0,281
1,0	0,582	0,418	3,2	0,730	0,270
1,2	0,598	0,402	3,4	0,740	0,260
1,4	0,613	0,387	3,6	0,750	0,250
1,6	0,628	0,372	3,8	0,760	0,240
1,8	0,642	0,358	4,0	0,769	0,231
2,0	0,656	0,344			

безразмерного аргумента $\alpha\Delta p$. Здесь интеграл F_1 — площадь, ограниченная индикаторной линией и осью перепадов Δp, вычисляемая численно. Произведение $G\Delta p_1$ представляет собой площадь прямоугольника F_2, равную произведению координат соответствующей точки индикаторной линии.

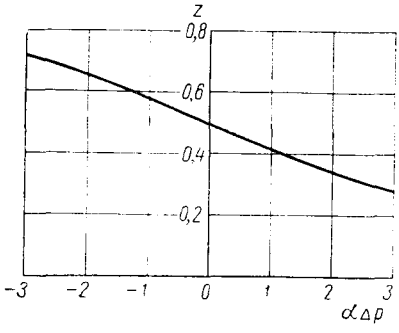


Рис. 35. Зависимость z ($\alpha\,\Delta p$).

Зависимость z ($\alpha\Delta p$) представлена графически на рис. 35 и в табл. 27. Положительная ветвь функции z ($\alpha\Delta p$) соответствует нагнетанию ($p_0 < p_c$), а отрицательная ветвь ($p_0 > p_c$) — отбору жидкости.

Пример. Определим по данным индикаторной линии 160—5 (рис. 36) коэффициент продуктивности K и коэффициент изменения параметров α.

1. Вычислим интеграл

$$F_1 = \int_0^{\Delta p_1} G\,d\,(\Delta p) = 4034.$$

Например, на последней точке индикаторной линии площадь F_1^9 можно определить численно для каждой точки индикаторной линии (кроме правой).

2. Определим площадь F_2 как произведение координат соответствующей точки индикаторной линии

$$F_2 = \Delta pG = 15 \cdot 280 = 7208.$$

3. Определим функцию $z = F_1/F_2 = 0{,}560$.

4. По безразмерному графику (см. рис. 36) при известном значении функции z определим безразмерную величину $\alpha\Delta p = 0{,}97$.

5. При известном значении Δp определим значение коэффициента α для данной точки индикаторной линии

$$\alpha = \frac{\alpha \Delta p}{\Delta p} = 0{,}0206\ am^{-1}.$$

Аналогично проводят расчеты и для других точек индикаторной линии.

6. Затем определим среднее значение коэффициента изменения параметров $\alpha_{ср}$

$$\alpha_{ср} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = \frac{0{,}0206 + 0{,}0169 + 0{,}0183}{3} = 0{,}0186\ am^{-1}.$$

7. Вычислим коэффициент продуктивности скважины

$$K = \frac{G\alpha_{ср}}{1 - e^{-\alpha_{ср}(p_0 - p_{ср})}} =$$

$$= 8{,}45\ m/сутки \cdot am.$$

Этим способом были обработаны индикаторные линии скважин ряда месторождений.

Существенно, что параметр α, характеризующий отклонения от линейной теории, связан со строением пласта, а не с погрешностями замеров. В самом деле, когда значения параметров α для ряда скважин нефтяного месторождения Карабулак-Ачалуки, которые исследовали по методу стационарных отборов (использовался указанный здесь способ обработки индикаторных линий), были нанесены на структурную карту месторождения, то выявлялись следующие закономерности. В области предполагаемых по геологическим данным тектонических нарушений (разрывов) пласта на куполе структуры параметр α гораздо больше его значений, соответствующих крыльям структуры. Этот факт может быть объяснен увеличением изгиба индикаторных линий, либо из-за неоднородности пласта (непроницаемыми или малопроницаемыми границами на линиях тектонических нарушений), либо из-за большей деформируемости (меньшей жесткости) скелета пористой среды в области тектонических дислокаций. Последнее хорошо согласуется с результатами сопоставлений [159] на структурной карте месторождения Умбаки с давлением разрыва пласта (с тем давлением в нагнетаемой жидкости, при котором происходит «хрупкое» разрушение скелета среды — образование новой системы или отдельной трещины в пласте). Это сопоставление показало, что в областях тектонических нарушений для разрыва пласта требуется гораздо большее давление — здесь скелет среды обладает большей прочностью на разрыв, чем в не тронутых тектоническими несогласиями областях пласта [52].

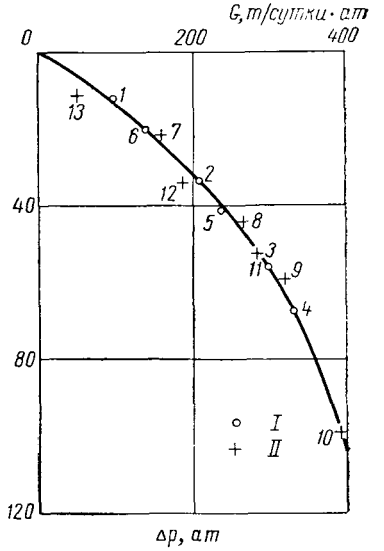


Рис. 36. Индикаторная линия скв. 160-5:

I — первая индикаторная линия (точки *1*, *2*, *3*, *4* — прямой ход; точки *5*—*6* — обратный ход); *II* — вторая индикаторная линия (точки *7*, *8*, *9*, *10* — прямой ход; точки *11*, *12*, *13* — обратный ход).

Используемый метод расшифровки индикаторных линий можно распространить и на случай других аналитических представлений зависимости параметров пласта и жидкости от давления. Так, формулам (23.8) должна соответствовать аналогичная функция

$$z = \frac{1}{1 - (1 - \alpha \Delta p)^n} + \frac{(1 - \alpha \Delta p)^{n+1} - 1}{(n+1)\,\alpha \Delta p\,[1 - (1 - \alpha \Delta p)]^n}, \qquad (28.6)$$

представленная графически на рис. 37.

Б. Методика проведения исследований **газовых скважин** при стационарных режимах фильтрации остается в основном той же, что и для нефтяных скважин.

Газовые скважины исследуются с выпуском газа как в атмосферу, так и в газопровод. В первом случае дебит скважины измеряют диафрагменным измерителем критического истечения (пруверо́м), а во втором — дифференциальными манометрами (например, манометрами типа ДП-430). Для измерения давления при исследовании газовых скважин обычно применяют образцовые манометры высокого класса точности. Если из скважины вместе с газом поступают значительные количества жидкости, то для измерения давления на забое используют глубинные манометры.

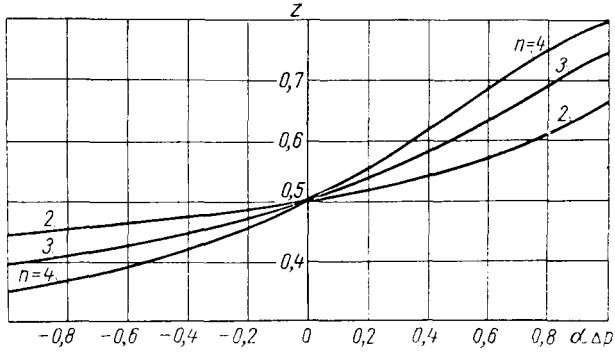


Рис. 37. Зависимость $z\,(\alpha\,\Delta p)$ при различных значениях n.

В частном случае при $k\,(p) = \text{const}$ и зависимости $\mu^* z$ от приведенного давления $p_{\text{пр}}$ типа [86]

$$\mu^* z = \sigma + \psi\,(p_{\text{пр}}^2 - p_{\text{пр}}), \qquad \mu^* = \mu/\mu_0$$

выражение для функции Л. С. Лейбензона примет вид

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\psi}\ln\left(\psi p_{\text{пр}}^2 - \psi p_{\text{пр}} + \sigma\right) + \frac{2}{\sqrt{4\psi\sigma - \psi^2}}\operatorname{arctg}\frac{2\psi p_{\text{пр}} - \psi}{\sqrt{4\psi\sigma - \psi^2}}\right\}. \qquad (28.7)$$

Разложим арктангенс в ряд и ограничимся первым членом разложения, пренебрежем величиной ψ^2 по сравнению с $4\psi\sigma$, а величину σ возьмем равной единице. Тогда получим следующее выражение для функции Л. С. Лейбензона:

$$\mathscr{P} = \left[(p_{\text{пр}}^2 - p_{\text{пр}})\frac{\ln \mu^* z}{\mu^* z - \sigma} + p_{\text{пр}} - \frac{1}{2}\right]. \qquad (28.8)$$

Для практически встречающихся значений $p_{\text{пр}}$ и $T_{\text{пр}}$ ошибка в вычислениях по формуле (28.8) не превышает $\pm 1{,}5\%$. Подставляя функцию (28.7) в формулу (23.2) для стационарного притока к скважине, получим

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\psi}\ln\frac{\psi p_{\text{пр. к}}^2 - \psi p_{\text{пр. к}} + \sigma}{\psi p_{\text{пр. к}}^2 \delta^2 - \psi p_{\text{пр. к}}\delta + \sigma} + p_{\text{пр. к}}(1+\delta)\right\} = \frac{p_{\text{ат}}\mu_1 T Q}{2\pi k h p_{\text{кр}}^2 \cdot 293}\ln\frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{с}}}, \qquad (28.9)$$

где $p_{\text{пр. к}}$ и $p_{\text{пр. с}}$ — приведенные контурные и забойные давления; Q — расход газа при стандартных условиях ($p = 106$ *ат* и $T = 293°$ К); $\delta = p_{\text{пр. с}}/p_{\text{пр. к}} = p_{\text{с}}/p_{\text{к}}$.

Для значений $p_{\text{пр. к}} < 6{,}0$ и $\delta > 0{,}3$ (с точностью до 5%) или $\delta > 0{,}7$ (с точностью до $\pm 1\%$) формулу (28.9) можно представить в виде

$$Q = \frac{1}{A}\,\frac{p^2_{\text{пр. к}}(1-\delta^2)}{2(\mu^* z)_{\text{ср}}},$$
$$A = \frac{p_{\text{ат}}\mu_1 T}{2\pi k h p^2_{\text{пр}} \cdot 293}\ln\frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{с}}}, \qquad (\mu^* z)_{\text{ср}} = \frac{(\mu^* z)_{\text{к}} + (\mu^* z)_{\text{с}}}{2}. \tag{28.10}$$

Здесь $(\mu^* z)_{\text{к}}$ и $(\mu^* z)_{\text{с}}$ — значения произведения $\mu^* z$ при пластовой температуре T соответственно при пластовом и забойном давлениях.

Расчеты показывают, что при заданной точности порядка $\pm 5\%$ реальные свойства газа необходимо учитывать при пластовых давлениях выше 120—140 *ат* и $\delta = p_{\text{с}}/p_{\text{к}} > 0{,}9$.

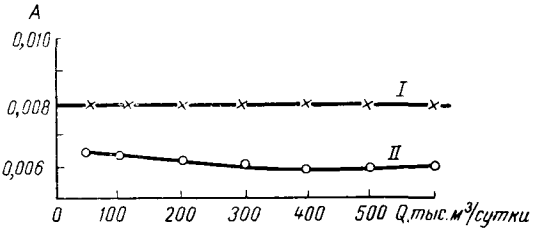


Рис. 38. Сравнение расчетов по формулам (28.10) (кривая *I*) и (28.11) (кривая *II*).

В настоящее время для обработки индикаторных линий используют следующую формулу, справедливую для идеального газа:

$$\frac{p_{\text{пр. к}}(1-\delta^2)}{2\mu^2_{\text{к}}} = AQ. \tag{28.11}$$

Для сопоставления формул (28.10) и (28.11) рассмотрим следующий пример. Исходные данные: $A = 20$ *сутки/тыс.* $м^3$; $p_{\text{к}} = 240$ *ат*, $p_{\text{пр. к}} = 4{,}8$, $T_{\text{пр}} = 1{,}6$, $A/p^2_{\text{кр}} = 0{,}008$.

Задаваясь дебитом скважины от 50 до 600 тыс. $м^3$/*сутки*, рассчитаем индикаторную линию по формулам (28.10) и (28.11). Результаты расчета представлены в виде графиков на рис. 38, из которых видно, что формула (28.11) искажает индикаторную линию, приводя к занижению коэффициента A. Отметим также, что при обработке индикаторной линии в координатах $\frac{p^2_{\text{пр. к}}(1-\delta^2)}{2\mu^*_{\text{к}} Q}$ и Q начальный участок прямой искривляется вверх. Индикаторная кривая имеет такой вид обычно, если на забое скважины находится жидкость [104].

Дифференциальное уравнение установившейся фильтрации реального газа при учете инерционных потерь, но при $k(p)/k(p_0) = 1{,}0$ записывается в виде

$$\frac{p_{\text{пр}}\,dp_{\text{пр}}}{z\,(p_{\text{пр}})}=\frac{p_{\text{ат}}\mu TQ}{2\pi khp_{\text{кр}}^2\cdot 293}\,\mu^*(p_{\text{пр}})\frac{dr}{r}+\frac{p_{\text{ат}}\rho_{\text{ат}}T^2Q^2}{4\pi^2h^2l'\rho_{\text{кр}}^2\cdot 293^2}\frac{dr}{r^2},\qquad(28.12)$$

где l' — так называемый коэффициент макрошероховатости [11].

Запишем формулу (28.10) в следующем виде:

$$\frac{1}{2\,(\mu^*z)_{\text{ср}}}\int\limits_{p_{\text{пр. с}}}^{p_{\max}}p_{\text{пр}}\,dp_{\text{пр}}\cong\int\limits_{p_{\text{пр. с}}}^{p_{\text{пр. к}}}\frac{p_{\text{пр}}\,dp_{\text{пр}}}{\mu^*(p_{\text{пр}})\,z\,(p_{\text{пр}})}=AQ.$$

Тогда, интегрируя уравнение (28.12), считая $z\mu^*$ постоянным для данного установившегося режима, получим

$$\frac{p_{\text{пр. к}}^2(1-\delta^2)}{2\mu_{\text{ср}}^*z}=AQ+B\frac{Q^2}{\mu_{\text{ср}}^*},\qquad B=\frac{p_{\text{ат}}\rho_{\text{ат}}T^2Q^2}{4\pi^2h^2l'p_{\text{кр}}^2\cdot 293^2}\left(\frac{1}{R_{\text{с}}}-\frac{1}{R_{\text{к}}}\right),\qquad(28.13)$$

где коэффициент A определяется [1] формулой (28.10).

Полученную формулу (28.13) можно использовать для определения коэффициентов a и b, представив ее в виде

$$\frac{p_{\text{к}}^2-p_{\text{с}}^2}{Q\mu_{\text{ср}}^*z_{\text{ср}}}=a+b\frac{Q}{\mu_{\text{ср}}},\qquad(28.14)$$

$$a=\frac{p_{\text{ат}}\mu_1T}{\pi kh\cdot 293}\ln\frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{с}}},\qquad b=\frac{p_{\text{ат}}\rho_{\text{ат}}T^2}{2\pi^2h^2l'\cdot 293^2}\left(\frac{1}{R_{\text{с}}}-\frac{1}{R_{\text{к}}}\right).$$

Результаты обработки данных испытаний скважины методом установившихся отборов по формуле (28.14) и по формуле для идеального газа, преобразованной к аналогичному виду (вместо $\mu_{\text{ср}}^*$ стоит $\mu_{\text{к}}^*$, причем $z_{\text{ср}}=1$), приведены в табл. 28.

Таблица 28

№ режима	$p_{\text{с}}$, *ат*	Q, тыс. *м³/сутки*	$\mu_{\text{ср}}^*$	$(z\mu^*)_{\text{ср}}$	$\frac{p_{\text{к}}^2-p_{\text{с}}^2}{Q\,(z\mu^*)_{\text{ср}}}$	$\frac{p_{\text{к}}^2-p_{\text{с}}^2}{Qp_{\text{к}}^2}$	$\frac{Q}{\mu_{\text{ср}}^*}$	$\frac{Q}{\mu_{\text{к}}^*}$
1	222,0	0	1,72	1,50	—	—	—	—
2	212,0	37,6	1,71	1,49	69,8	60,5	22,0	21,8
3	197,4	94,8	1,66	1,44	74,3	62,3	57,0	55,0
4	174,3	148,5	1,61	1,40	90,0	72,3	92,2	86,4
5	158,2	192,5	1,58	1,37	91,3	72,6	122,0	112,0
6	134,2	248,7	1,54	1,34	93,4	72,6	161,5	144,5
7	108,2	280,0	1,49	1,30	103,0	77,5	187,0	163,0

Подчеркнем, что при обработке по формуле для идеального газа получаем заниженные значения коэффициентов a и b: коэффициент $a=57$ вместо 64, т. е. занижение на 11%, коэффициент $b=0{,}12$ вместо 0,21, т. е. занижение на 43%.

[1] В случае несовершенных скважин в коэффициенты A и B войдут еще дополнительные сопротивления на несовершенство скважин.

В. При обработке индикаторных линий **газовых скважин в условиях зависимости свойств газа и проницаемости пласта от давления** будем исходить из формул (23.10) — (23.11) стационарного притока газа к скважине при нелинейно-упругом режиме фильтрации [20].

Для нахождения величины коэффициента a по формулам (23.10) и (23.11) из индикаторных зависимостей $p_к^2 - p_с^2 = f(Q)$ необходимо вначале определить величину коэффициента продуктивности:

$$K = \frac{\pi k_0 h}{\mu_0 z_0} \frac{1}{\ln(R_к/R_с)}.$$

Как уже отмечалось выше, при определении K по тангенсу наклона касательной (к кривой зависимости $p_к^2 - p_с^2 = f(Q)$ при $Q = 0$) могут допускаться существенные ошибки (испытания газовых скважин начинают с довольно больших дебитов, начальные участки индикаторных кривых экстраполируются неточно). Обработка же индикаторных кривых по формулам (23.10) и (23.11) методом наименьших квадратов также трудна и связана с большим объемом вычислений. Поэтому воспользуемся методом, аналогичным приведенному в п. А этого параграфа.

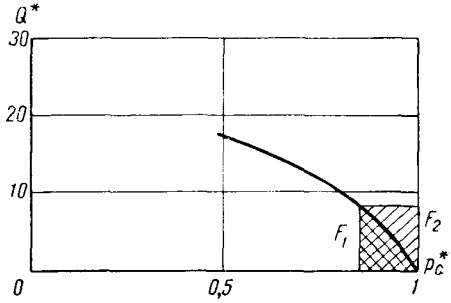


Рис. 39. Зависимость $p_с^* = p_с/p_к$ от безразмерного дебита Q^*.

Построив по результатам исследования скважины при стационарных режимах зависимости $p_с^*$ от Q^* (рис. 39), введем функцию z, равную отношению площади под индикаторной кривой F_1 к площади прямоугольника F_2 с координатами $Q(p_с^*)$ и $p_с^*$.

$$z = \frac{F_1}{F_2}. \tag{28.15}$$

При линейных зависимостях упругих свойств пласта и газа от давления площадь F_1 под индикаторной кривой и площадь F_2 соответствующего прямоугольника будут равны

$$F_1 = \int_1^{p_с^*} Q^*(p_с^*)\, dp_с^*, \qquad F_2 = (1 - p_с^*)\, Q^*(p_с^*). \tag{28.16}$$

Если параметры пласта и газа связаны с давлением экспоненциальным законом, результаты исследования удобнее представить в координатах $Q^* = \varphi(p_к - p_с)$. Тогда

$$F_1 = \int_{p_к}^{p_с} Q_1^*(p_с)\, dp_с, \qquad F_2 = (p_к - p_с)\, Q_1^*(p_с). \tag{28.17}$$

$\alpha p_к$	Значения z при p_c^*								
	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55
0	0,509	0,517	0,526	0,535	0,544	0,554	0,564	0,574	0,584
5	0,525	0,550	0,575	0,599	0,627	0,648	0,676	0,689	0,720
10	0,546	0,590	0,702	0,671	0,706	0,737	0,746	0,788	0,808
15	0,566	0,628	0,684	0,731	0,770	0,800	0,826	0,847	0,863
20	0,584	0,664	0,728	0,778	0,815	0,858	0,865	0,882	0,895
25	0,603	0,694	0,765	0,806	0,847	0,872	0,890	0,907	0,916
30	0,622	0,725	0,795	0,833	0,870	0,893	0,908	0,919	0,928
35	0,641	0,749	0,820	0,857	0,889	0,906	0,921	0,934	0,939
40	0,660	0,773	0,840	0,878	0,903	0,919	0,930	0,939	0,946
45	0,677	0,793	0,858	0,892	0,914	0,928	0,938	0,946	0,951
50	0,693	0,810	0,870	0,902	0,920	0,935	0,943	0,951	0,956

и подстановка в формулу (28.15) после интегрирования дает

$$z = \frac{\alpha p_c (\alpha p_к - 1) - (\alpha p_c - 2)\, e^{\alpha (p_c - p_к)}}{\left[(\alpha p_к - 1) - (\alpha p_c - 1)\, e^{\alpha (p_c - p_к)}\right] \alpha (p_к - p_c)}. \qquad (28.18)$$

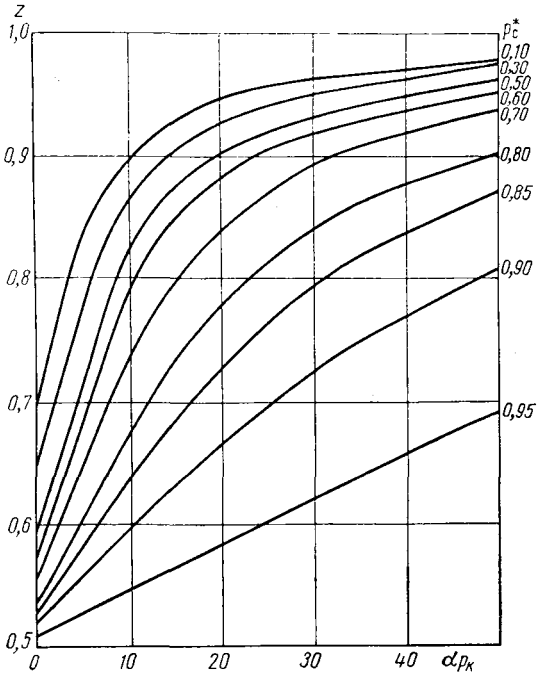


Рис. 40. График зависимости z от безразмерного давления $\alpha p_к$.

Таблица 29

Значения z при p_c^*								
0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,1
0,595	0,606	0,617	0,628	0,640	0,652	0,665	0,678	0,691
0,730	0,746	0,759	0,773	0,783	0,811	0,814	0,824	0,835
0,825	0,839	0,852	0,863	0,873	0,881	0,889	0,895	0,901
0,877	0,881	0,897	0,927	0,912	0,917	0,923	0,927	0,931
0,905	0,914	0,921	0,927	0,932	0,937	0,941	0,944	0,947
0,923	0,930	0,936	0,941	0,946	0,949	0,953	0,955	0,958
0,936	0,941	0,946	0,950	0,954	0,957	0,960	0,962	0,964
0,946	0,950	0,954	0,957	0,961	0,963	0,966	0,967	0,970
0,951	0,956	0,959	0,963	0,965	0,968	0,970	0,971	0,973
0,957	0,960	0,964	0,967	0,969	0,971	0,973	0,974	0,976
0,961	0,964	0,967	0,970	0,972	0,974	0,976	0,977	0,978

По формуле (28.18) построены универсальные графики зависимости z от безразмерного параметра $\alpha p_к$ в диапазоне всех возможных значений p_c^* (табл. 29, рис. 40). Пользуясь указанными графиками, можно определить величину коэффициента α, зная значения z, $p_к$, p_c, по результатам промысловых исследований скважин при стационарных режимах фильтрации.

В табл. 30 приведены результаты обработки индикаторных линий скв. 19, 31 Челбасского месторождения, скв. 1, 7, 9, 12, 15 Ленинградского месторождения, скв. 29 Старо-Минского месторождения, скв. 11, 15 Каневского месторождения [20].

Таблица 30

№ скважины	Δp_{max}	Q_z, тыс. $м^3/сутки$	$\alpha \cdot 10^2$, $атм^{-1}$	$\alpha_\mu \cdot 10^2$, $атм^{-1}$	$\alpha_z \cdot 10^4$ $атм^{-1}$	$\alpha_к \cdot 10^2$, $атм^{-1}$
19ч	32,2	246,0	0,855	2	1,0	0,836
31ч	70,2	277,0	0,97	0,02	5,0	0,95
1л	9,0	576,1	21,3	2,4	3,0	21,1
7л	46,0	452,8	5,8	2,4	3,0	5,55
12л	12,0	618,7	14,5	2,4	3,0	14,3
9л	19,0	441,3	13,7	2,4	3,0	13,4
15л	58,8	368,0	2,62	0,02	5,0	2,6
29см	31,4	439,0	6,2	3,0	5,0	5,9
11к	46,8	188,0	7,65	2,0	4,6	7,45
15к	25,3	190,4	5,0	2,0	4,6	4,5

Примечание. У номера скважины индексы означают месторождения: ч — Челбасское; л — Ленинградское; см — Старо-Минское; к — Каневское.

Расчеты показывают, что параметр α для этих месторождений колеблется в пределах $0{,}1 \cdot 10^{-2}$—$21{,}0 \cdot 10^{-2}$ $атм^{-1}$. Влияние изменений динамического коэффициента вязкости α_μ и коэффициента сверхсжимаемости газа α_z на величину коэффициента α при стационарных исследованиях скважин, как это видно из табл. 29, незначительно.

Порядок изменения величины коэффициента α по данным исследования скважин совпадает с порядком изменения проницаемости по экспериментальным данным, приведенным в работе [308] для сильно глинизированных песчаников и в работе [53] для трещиноватых пород.

Г. Обратимся теперь к рассмотрению характера индикаторной линии **скважины, вскрывшей несколько пропластков с одинаковыми или разными пластовыми давлениями.**

В работах [89, 103] при использовании обычных линейных соотношений теории фильтрации было показано, что индикаторные кривые при равных пластовых давлениях, обработанные в координатах $\Delta p^2/Q$ от Q, имеют вид кривой, представленный на рис. 41. Эта кривая отсекает на оси ординат отрезок, равный величине $A_1 = 1\Big/\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{a_i}$, и с увеличением дебита асимптотически выполаживается в прямую, характеризующуюся уравнением

$$\frac{p_{\text{пл}}^2 - p_{\text{с}}^2}{Q} = A_2 + BQ, \tag{28.19}$$

здесь

$$A_2 = B\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{b_i}; \qquad B = \left[\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{1}{b_i}}\right]^{-2},$$

a_i и b_i — коэффициенты фильтрационного сопротивления i-го горизонта; N — число горизонтов, вскрытых скважиной.

Этот теоретически возможный характер зависимости между дебитом и забойным давлением был подтвержден результатами промысловых исследований на Шебелинском, Верховском и Саушинском месторождениях.

Рассмотрим особенности работы скважины, вскрывшей единым фильтром два пласта с разными пластовыми давлениями [89]. Когда скважина закрыта, т. е. $q_{\text{с}} = 0$, будет происходить переток газа из пласта с более высоким давлением (1-й пласт) в пласт с более низким пластовым давлением (2-й пласт). Процесс перетока будет характеризоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} p_{\text{пл. 1}}^2 - p_0^2 &= a_1 q_{\text{п}} + b_1 q_{\text{п}}^2, \\ p_0^2 - p_{\text{пл. 2}}^2 &= a_2 q_{\text{п}} + b_2 q_{\text{п}}^2, \end{aligned} \tag{28.20}$$

где p_0 — забойное давление в остановленной скважине; $q_{\text{п}}$ — дебит газа, перетекающего из одного пласта в другой при закрытом устье скважины.

Согласно формулам (28.20) величина $q_{\text{п}}$ определяется формулой

$$q_{\text{п}} = \frac{(a_1 + a_2)}{2(b_1 + b_2)} + \sqrt{\frac{(a_1 + a_2)^2}{4(b_1 + b_2)^2} - \frac{p_{\text{пл. 1}} - p_{\text{пл. 2}}}{b_1 + b_2}}. \tag{28.21}$$

При открытии скважины величина $q_п$ уменьшится, причем $q_1 = q_п + q_{скв}$ (здесь q_1 — дебит первого пласта). Разобьем всю индикаторную кривую совместной работы пластов на два участка: первый — период работы, когда $q_п > 0$; второй — период работы, когда $q_п = 0$, а $q_2 > 0$ (здесь q_2 — дебит второго пласта). Рассмотрим эти два участка отдельно.

В связи с тем, что обычно на практике при одновременном вскрытии двух пластов бывает известна только величина p_0, все зависимости выразим через эту величину. Тогда

$$p_0 = p_{пл.\,1} - \delta_1 \quad \text{и} \quad p_0 = p_{пл.\,2} + \delta_1, \tag{28.22}$$

$$p_0^2 - p_c^2 = a_1 q_1 + b_1 q_1^2 - C_1,$$

$$p_c^2 - p_0^2 = a_2 q_п + b_2 q_п^2 - C_2,$$

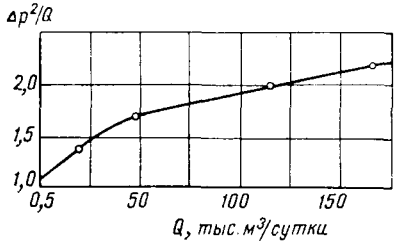


Рис. 41. Зависимость $\Delta p^2/Q$ от Q для скв. 2 Саушинского месторождения.

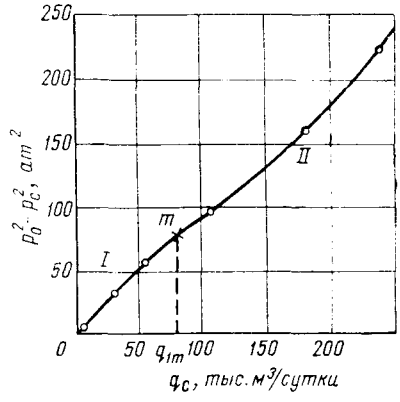


Рис. 42. Индикаторные линии скв. 56 Верховского месторождения.

где

$$C_1 = 2p_0\delta_1 + \delta_1^2 = a_1 q_п + b q_п^2, \qquad C_2 = 2p_0\delta_2 - \delta_2^2 = a_2 q_п + b_2 q_п^2,$$

$$C_1 - C_2 = q_п (a_1 - a_2) + q_п^2 (b_1 - b_2).$$

Отсюда при $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ имеем $C_1 = C_2$.

Суммируя уравнения (28.22) и учитывая, что $q_c = q_1 - q_п$, после ряда преобразований получим

$$2(p_0^2 - p_c^2) = a_1 q_c + b_1 q_c^2 + (a_1 - a_2) q_п + (b_1 - b_2) q_п^2 + 2b_1 q_1 q_п - (C_1 - C_2). \tag{28.23}$$

Формула (28.23) характеризует индикаторную кривую скважины на начальном участке. Легко убедиться, что $p_0^2 - p_c^2 = 0$ при $q_c = 0$. Из уравнения (28.23) видно, что индикаторная линия направлена выпуклостью от оси абсцисс (слагаемое $2b_1 q_c q_п$ обращается в нуль, когда $q_c = 0$ и $q_п = 0$, см. рис. 42). Конец первого участка будет характеризоваться точкой m, где $q_п = 0$, $q_c = q_{1m}$. На втором участке (правее точки m) работа пластов определяется той же формулой (28.23), но при замене в ней $q_п = -q_2$:

$$2(p_0^2 - p_c^2) = a_1 q_c + b_1 q_2^2 - (a_1 - a_2) q_2 - (b_1 - b_2) q_2^2 - 2b q_1 q_2 - (C_1 - C_2). \tag{28.24}$$

Из формулы (28.24) видно, что $p_0^2 - p_c^2 = C_2$ при $q_c = q_{1m}$. Зная C_2, можно определить величину δ_2 и, следовательно, $p_{пл\,2}$.

Таким образом, индикаторные кривые на всем интервале дебитов будут иметь вид (см. рис. 42), подобный виду индикаторной кривой, полученной при исследовании скв. 56 Верховского месторождения, которая эксплуатирует два пласта с различными давлениями.

При $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ начальный участок индикаторной кривой в координатах $\Delta p^2/q_c$ будет иметь вид, показанный на рис. 43.

Величина $\Delta y = y_1 - y_2 = b\left(\frac{1}{2}\, q_{1m} - q_п\right) \lessgtr 0$. Для нахождения величин y_1 и y_2 по начальному участку нужно знать величину $q_п$. Если $\Delta y = 0$, т. е. $y_1 = y_2$, то $q_п = \frac{1}{2}\, q_{1m}$; если $\Delta y > 0$, то $q_п > \frac{1}{2}\, q_{1m}$; если $\Delta y \leqslant 0$, то $q_п < \frac{1}{2}\, q_{1m}$.

Конечный участок индикаторной кривой в тех же координатах будет описываться формулой

$$\frac{p_0^2 - p_c^2}{q_c} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\, q_c - b\,\frac{q_1 q_2}{q_c} = \frac{a}{2} + bq_c\left[\frac{1}{2}\,\frac{q_1 q_2}{(q_1+q_2)^2}\right]. \qquad (28.25)$$

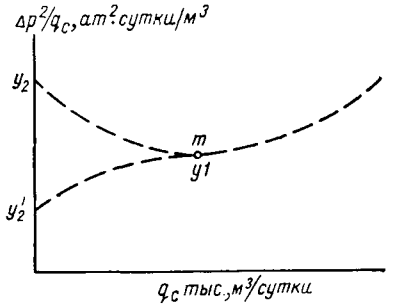


Рис. 43. Зависимость $\Delta p^2/q_c$ от q_c для пластов с одинаковыми параметрами:

$$y_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\, q_{1м} \text{ и } y_2 = \frac{a}{2} + bq_п.$$

Для нахождения параметров a, b нужно предварительно знать значения q_1 и q_2.

Слагаемые $q_1 q_2/(q_1 + q_2)^2$ при возрастании q_c (увеличение q_1 и q_2) также возрастают, что приводит к уменьшению величины в квадратных скобках формулы (28.25). Отсюда конечный участок индикаторной линии в координатах $(p_0^2 - p_c^2)/q_c$ и q_c для одинаковых, но разобщенных пластов будет иметь вид кривой с выпуклостью от оси абсцисс y_2' (см. рис. 43).

При неравенстве параметров пластов качественная картина в основном сохраняется. Так, начальный участок индикаторной кривой будет иметь такой же вид, как и на рис. 43, однако по характеру кривой уже нельзя будет делать заключения о соотношении между $q_п$ и q_{1m}, так как параметр Δy в этом случае приближенно выражается более сложной формулой

$$\Delta y = y_2 - y_1 = b_1\left(q_п - \frac{1}{2}\, q_{1m}\right) - \frac{C_1 - C_2}{2q_{1m}}.$$

Конечный участок в координатах $(p_0^2 - p_c^2)/q_c$ в общем случае может иметь любой вид, т. е. кривая может быть направлена выпуклостью как к оси абсцисс, так и от нее.

§ 29. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СИСТЕМЫ СКВАЖИН

Математические задачи, возникающие в практике разведки и разработки нефтяных и газовых месторождений, подразделяются на две группы. К первой группе (прямые задачи) относятся задачи, связанные с прогнозированием процессов, происходящих в продуктивных пластах при их разработке. Ко второй (обратные задачи) — задачи, связанные с определением параметров пласта и насыщающих его жидкостей по фактическим данным работы скважин, вскрывающих этот пласт. Решение задач каждой группы имеет свои особенности, определяемые искомой формой представления этих решений. Если для задач первой группы решение может быть выражено в любом виде (таблицы, графики, формулы и т. д.), то для задач второй группы решения должны быть в виде, представляющем возможность обработки экспериментально-промысловых данных с целью определения параметров коллектора. Если для решения прямых задач в настоящее время используют точные методы, основанные на применении ЭВМ и ЭАМ, то обратные задачи решают в основном приближенными методами.

При решении прямых задач рассматриваются целые системы скважин, расположенные определенным образом на площади месторождения. Если дифференциальное уравнение, описывающее процессы, происходящие в пласте, является линейным (или линеаризованным), решение прямых задач для систем скважин получают путем суперпозиции решений для отдельных скважин. Если же дифференциальные уравнения нелинейные, то тогда прибегают к специальным приближенным методам для расчета поля давления [73, 105, 149]. Однако и в этих случаях используют решения, описывающие работы единичной скважины.

При решении обратных задач в основном рассматривают потоки к одиночным скважинам. Влияние же всей системы соседних скважин на данную исследуемую скважину оценивают как фактор, искажающий результаты эксперимента. Иногда [105] при решении обратных задач рассматривают и целые системы скважин, но в настоящей работе эти задачи не исследуются.

Указанные соображения определили выбор рассмотренных выше основных модельных задач, решение которых служит гидрогазодинамической основой расчетов по разработке месторождений, а именно:

1) *модель стационарного притока к скважине* — встречается в прямых и в обратных задачах;

2) *модель нестационарного притока к единичной скважине в бесконечном пласте* — встречается в обратных задачах. При этом на внутренней границе (*забой скважин*) задаются следующие граничные условия:

а) постоянный дебит скважины (или мгновенная остановка скважины на забое);

б) изменяющийся во времени дебит скважины (или закрытие скважины с постоянным уменьшением дебита до нуля); постоянное забойное давление является частным случаем этого граничного условия;

3) *модель нестационарного притока к скважинам в пластах конечных размеров* — используется в прямых и обратных задачах при тех же условиях на внутренней границе (забой скважин). На внешней границе задаются постоянным давлением либо отсутствием потока.

Следует отметить, что для начальных промежутков времени на работу скважины не сказываются условия на внешней границе пласта. Поэтому решения для последних двух задач на этом промежутке времени совпадают. Этот период времени называется первой фазой истощения месторождения. Затем наступает вторая фаза, когда решения для бесконечного и конечного пластов различаются и, кроме того, решения для конечных пластов с различными условиями на внешней границе также разнятся.

Перейдем теперь к рассмотрению поправок к принятым гидродинамическим методам проектирования разработки нефтяных и газовых месторождений, вносимых учетом нелинейно-упругих эффектов.

1. Уточнение методики расчета работы систем нефтяных скважин при нелинейно-упругом режиме фильтрации.

Основные положения проектирования нефтяных месторождений с учетом зависимости проницаемости пласта и свойств жидкости от пластового давления остаются теми же, что и без учета этой зависимости [112]. Однако определение параметров пласта, а также гидродинамические расчеты несколько видоизменяются. Так, для проектирования и анализа необходимо знать не только коэффициент гидропроводности пласта при каком-то определенном пластовом давлении, но еще и новый параметр — коэффициент изменения гидропроводности α. Во все гидродинамические расчеты вводится среднее значение коэффициента α.

Учет изменения проницаемости пласта, плотности и вязкости жидкости от давления не влияет на характер размещения галерей и скважин; формулы и номограммы Ю. П. Борисова [29, 30, 112] действительны и при размещении скважин на пласте с меняющимися значениями k, m, ρ, μ при изменениях давления в пласте. Эффект нелинейно-упругих свойств среды и жидкости сказывается на величинах дебитов и приемистости скважин, а следовательно, и на сроках разработки месторождения. Рассмотрим некоторые особенности проектирования при нелинейно-упругом режиме.

Для облегчения расчетов притока к скважинам, расположенным в виде рядов, было предложено несколько упрощенных расчетных методик [29, 227], из которых наиболее эффективен метод фильтрационных сопротивлений Ю. П. Борисова. Выше было показано, что уравнение нелинейно-упругого режима при установившейся фильтрации линейное (уравнение Лапласа) относительно функции

Л. С. Лейбензона и к нему применим принцип суперпозиции. Поэтому существующие решения задач для несжимаемой жидкости недеформируемых сред можно видоизменить и на случай, когда учитываются упругие свойства среды и жидкости. Для этого достаточно в известные расчетные формулы вместо величины p подставить величину $u = \exp[-\alpha(p_0 - p)]\,\alpha^{-1}$, а вместо объемного дебита Q — величину $G\rho_0^{-1}$. Тогда, например, дебит одного ряда скважин в полосообразной залежи [38, 320] будет равен

$$G = \frac{Дk_0\rho_0 h}{\mu_0\alpha}\,\frac{\exp[-\alpha(p_0 - p_л)] - \exp[-\alpha(p_0 - p_c)]}{L + \sigma\pi^{-1}\ln(\sigma/\pi r_c)}, \qquad (29.1)$$

здесь $Д$ — ширина залежи; $p_л$ — среднее давление на линии нагнетания; L — расстояние от линии нагнетания до ряда скважин; σ — половина расстояния между скважинами в ряду.

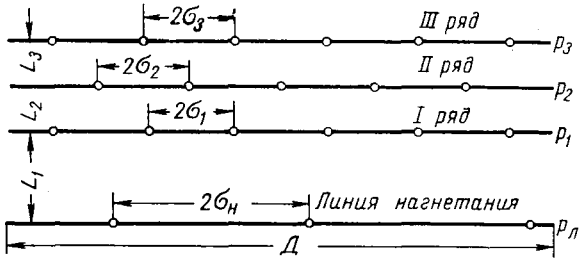


Рис. 44. Схема трех рядов эксплуатационных скважин.

Дебиты нескольких одновременно работающих рядов скважин определяются как и в методе Ю. П. Борисова [29]. В частности, дебиты трех одновременно работающих рядов скважин в полосообразной залежи (рис. 44) можно рассчитать, решая следующую систему уравнений:

$$\frac{Дk_0\rho_0 h}{\mu_0}\,\frac{e^{-\alpha(p_0-p_л)} - e^{-\alpha(p_0-p_1)}}{\alpha} = (G_1 + G_2 + G_3)L_1 + G_1\frac{\sigma_1}{\pi}\ln\frac{\sigma_1}{\pi r_c}, \qquad (29.2)$$

$$\frac{Дk_0\rho_0 h}{\mu_0}\,\frac{e^{-\alpha(p_0-p_1)} - e^{-\alpha(p_0-p_2)}}{\alpha} = -G_1\frac{\sigma_1}{\pi}\ln\frac{\sigma_1}{\pi r_c} +$$

$$+ (G_2 + G_3)L_3 + G_2\frac{\sigma_2}{\pi}\ln\frac{\sigma_1}{\pi r_c},$$

$$\frac{Дk_0\rho_0 h}{\mu_0}\,\frac{e^{-\alpha(p_0-p_2)} - e^{-\alpha(p_0-p_3)}}{\alpha} = -G_2\frac{\sigma_2}{\pi}\ln\frac{\sigma_2}{\pi r_c} + G_3L_3 + G_3\frac{\sigma_3}{\pi}\ln\frac{\sigma_3}{\pi r_c},$$

здесь G — дебиты рядов скважин; p_i — забойные давления i-го ряда. Заметим, что на практике при проектировании разработки месторождений чаще всего принимают $p_1 = p_2 = p_3 = p_c$, а также $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$. При этом система (29.2) существенно упрощается.

Аналогичным образом можно было бы показать, что известные формулы для определения дебитов и давлений одновременно работающих рядов скважин в круговой залежи [29] также видоизменяются подстановкой величины $u = \exp[-\alpha(p_0 - p)]\,\alpha^{-1}$ вместо p и величины $G\rho^{-1}$ вместо объемного дебита Q.

Для примера был рассчитан суммарный дебит трех одновременно работающих рядов скважин в полосообразной залежи $G = G_1 + G_2 + G_3$ для разных значений параметра α при разных значениях забойного давления p_c. Значения параметра α принимались в практических пределах ($\alpha = 0$; 0,001; 0,006; 0,02; 0,05; 0,08). Данные для расчета: $p_л = p_0 = 175$ *ат*, $p_1 = p_2 = p_3 = p_c$, $k_0 = 0{,}5$ *д*; $h = 10$ *м*; $r_c = 0{,}01$ *м*; $\mu = 3$ *спз*; $\rho_0 = 0{,}87$ *г/см*^{3}; $D = 5000$ *м*. Остальные данные указаны на рис. 44. Результаты расчетов по формулам (29.2) сведены в табл. 31.

Таблица 31

p_c, *ат*	Δp	G_0 при $\alpha=0$	G (в *т/сутки*) при α					G_0/G при α					
			0,001	0,006	0,02	0,05	0,08	0,000	0,001	0,006	0,02	0,05	0,08
90	85	2522	2371	1975	1214	579	375	1,0	1,060	1,277	2,077	4,356	6,7
110	65	1911	1872	1598	1072	565	367	1,0	1,022	1,199	1,783	3,382	5,2
125	50	1478	1440	1277	929	542	360	1,0	1,021	1,157	1,591	2,727	4,1
145	30	890	868	811	663	458	339	1,0	1,020	1,097	1,342	1,943	2,6
150	15	445	444	423	388	311	261	1,0	1,003	1,052	1,147	1,431	1,7

Случай при $\alpha = 0$ соответствует общепринятой сейчас методике проектирования. Суммарные дебиты при $\alpha = 0$ условно обозначим G_0, а суммарные дебиты при $\alpha \neq 0$ обозначим G. Отношение G_0/G показывает, во сколько раз можно ошибиться в определении дебитов по общепринятой методике проектирования без учета упругих свойств породы и жидкости. Из данных табл. 31 видно, что эта ошибка может быть значительной особенно при больших перепадах давлений и значений параметра α.

Рассмотрим расчет процесса нагнетания воды в пласт. Известно, что количество закачиваемой воды Q должно быть равно сумме дебита скважин Q_1 и количества воды, уходящей за пределы залежи Q_2, т. е.

$$Q = Q_1 + Q_2. \tag{29.3}$$

Величину Q_1 определим из решения системы уравнений (29.2), а Q_2 — по формуле работы [29].

Среднюю приемистость одной нагнетательной скважины рассчитаем по формуле

$$q = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0} \cdot \frac{\exp[-\alpha(p_0 - p_л)] - \exp[-\alpha(p_0 - p_c)]}{\alpha \ln(\sigma/\pi r_c)}, \tag{29.4}$$

здесь p_c — давление на забое нагнетательной скважины; σ — половина расстояния между нагнетательными скважинами.

Здесь возможны следующие варианты забойного давления и давления на линии нагнетания относительно начального давления

в пласте: $p_с > p_л > p_0$, $p_с > p_л = p_0$, $p_с > p_0 > p_л$, $p_с = p_0 > p_л$, $p_0 \geqslant p_с > p_л$.

Суммарная закачка воды на линии нагнетания составит

$$Q = qN, \quad Q = \frac{2\pi k_0 \rho_0 h}{\mu_0} \frac{\exp[-\alpha(p_0 - p_л)] - \exp[-\alpha(p_0 - p_с)]}{\alpha \ln(\sigma/\pi r_с)} \frac{L}{2\sigma}. \quad (29.5)$$

Из формулы (29.4) имеем

$$\sigma \ln \frac{\sigma}{\pi r_с} = A, \quad A = \frac{\pi k_0 \rho_0 h \{\exp[-\alpha(p_0 - p_л)] - \exp[-\alpha(p_0 - p_с)]\}}{Q \mu_0 \alpha}. \quad (29.6)$$

Путем подбора или графически из формулы (29.5) определим половину расстояния между нагнетательными скважинами σ. Далее при известном σ легко определить другие искомые величины согласно работе [112].

Для построения карт изобар необходимо знать пластовое давление $p_к$ в окрестности данной скважины. Для его определения обычно скважину останавливают на время, за которое давление практически восстанавливается. Однако это время может быть длительным и поэтому в настоящее время $p_к$ определяют расчетными методами.

Решая формулу (23.3) относительно $p_к$, имеем

$$p_к = p_0 + \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{G \alpha \mu_0 \ln(R_к/R_с)}{2\pi k_0 \rho_0 h} + \exp[-\alpha(p_0 - p_с)] \right\}, \quad (29.7)$$

причем p_0, $p_с$, G можно замерить непосредственно на скважине. Комплекс параметров $k_0 \rho_0 h/\mu_0$ и приведенный радиус $r_с$ скважины можно определить по кривым восстановления давления или по индикаторным линиям. Параметр α определяют по индикаторным линиям.

В процессе эксплуатации скважин в результате мероприятий по воздействию на призабойную зону (гидроразрыв, торпедирование и т. д.) могут изменяться их приведенные радиусы и параметры α и $k_0 \rho_0 h/\mu_0$. Поэтому их периодически следует определять заново.

2. Использование результатов исследования при расчете работы систем газовых скважин.

Реальные газовые месторождения крайне сложны по своей геометрии, параметрам, конструкции забоя скважин. Все это приводит к тому, что прогнозные расчеты оказываются тем более точными, чем точнее методы расчета и чем больше используется фактический материал о работе скважин. Испытание газовых скважин при стационарных режимах фильтрации дает связь между пластовыми и забойными давлениями и дебитом скважины, которая учитывает все сложности притока газа к забою скважин. Поэтому представляет интерес использовать эту связь непосредственно для расчета работы системы скважин. Ранее был предложен [105] следующий метод проектирования работы систем скважин.

По уравнению материального баланса определяют среднее давление в залежи, которое считают пластовым давлением для каждой

скважины. Зная пластовое давление и заданный технологический режим и продуктивную характеристику скважины (из испытаний), можно рассчитать дебит скважины. Этот метод дает хорошие результаты для равномерных сеток скважин.

В последнее время все чаще стали применять системы размещения с центральным расположением скважин. При такой системе размещения скважин на месторождении образуется депрессионная воронка, т. е. считать пластовое давление равным среднему во всех точках пласта нельзя. Для соответствующего расчета поля давления было использовано уравнение Л. С. Лейбензона [131], в котором предполагалось, что отбор с месторождения происходит не через отдельные стоки, а из каждого элементарного объема пласта.

Нелинейное уравнение можно решить либо путем линеаризации (см. § 25), либо приближенными методами. В работе [149] был применен метод «осреднения», который при сопоставлении с решением на ЭВМ показал высокую точность. Однако использовать полученные формулы для расчета систем скважин оказалось практически невозможно из-за сложности вычисления среднего давления. Поэтому (как и для решения основных модельных задач) было предложено использовать приближенное равенство (25.21). Проверка окончательного метода расчета поля давления на фактическом материале разработки ряда месторождений [105] показала его полную приемлемость.

Таким образом, расчет работы системы скважин сводится к следующему. По уравнению материального баланса находят среднее давление; по формулам для распределения пластового давления при заданном распределении отборов [105] определяют пластовое давление для каждой скважины; в дальнейшем по результатам испытания скважины для принятого технологического режима рассчитывают дебит скважины.

Для реального газа и деформируемого пласта дифференциальное уравнение для поля давления при осесимметричной фильтрации имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\,\frac{k(p)\,p}{\mu(p)\,z(p)}\,\frac{\partial p}{\partial r}\right\}=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{m(p)\,p}{z(p)}\right\}+\frac{T_{\text{пл}}}{T_{\text{ст}}}\,q(r), \qquad (29.8)$$

где $q(r)$ — отбор газа из элементарного объема, т. е. $q(r)=\frac{\partial}{\partial\Omega}N$ (N — отбор с месторождения; Ω — объем пласта, принимаемый неизменным).

Уравнение (29.8) можно также решить одним из приближенных методов, в том числе и методом осреднения. При этом решение будет отличаться от решения для идеального газа только тем, что вместо функции $p^2/2$ будет стоять функция $p^*=\int\frac{k(p)\,p}{\mu(p)\,z(p)}\,dp$.

Решение уравнения (29.8) относительно функции p для изолированного пласта имеет вид

$$p^*-p_{\text{к}}^*=[\psi(\theta)-\psi(1)]-Q^*[\varphi(\theta)-\varphi(1)], \qquad (29.9)$$

где

$$\psi(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{\rho(\theta)}{f(\theta)}\,d\theta,\qquad \rho(\theta)=\int_0^{\theta}Q(\Omega)\,d\Omega,$$

$$\varphi(\theta)=\int_0^{\theta}\frac{\Omega(\theta)}{f(\theta)}\,d\theta,\qquad Q^*=\frac{\mu_0 p_{\text{ат}}T_{\text{пл}}\theta_{\text{к}}^2 N(\theta)}{k_0 p_0^2 T_{\text{ст}}\Omega},$$

θ — координата.

Для месторождения различной геометрической конфигурации и различного распределения отборов по площади вычисляют функции ψ (1) и φ (1), а затем по формуле (29.9) находят распределение функции p^* по площади. Известно (см. § 23) также, что стационарный приток к скважинам определяется тоже функцией p^*. Таким образом, принимая для данной скважины в качестве $p^*_{\text{пл}}$ значения функции p^* из поля давления в этой точке, можно рассчитать дебит скважины при известном технологическом режиме.

Связь со временем может быть выписана следующим образом. Зная для данного месторождения изменение параметров $k(p)$, $\mu(p)$, $z(p)$ от давления, находят аналитическую зависимость между p^* и p. Для функции p^* можно использовать также значения этой функции, приведенные в § 27. Зная распределение p^*, можно найти распределение p и, следовательно, среднее давление в залежи. Связь между средним давлением и количеством отобранного газа $Q_{\text{д}}$ определяется уравнением материального баланса, которое при изменении пористости по экспоненциальному закону записывается как

$$\frac{Q_{\text{д}}}{\Omega_{\text{н}}}=\frac{p_{\text{н. ср}}}{z_{\text{н}}}-\frac{p_{\text{т. ср}}}{z_{\text{т}}}\,e^{-a_m(p_{\text{н. ср}}-p_{\text{т. ср}})},$$

где $\Omega_{\text{н}}$ — начальный объем порового пространства пласта; $p_{\text{н. ср}}$, $p_{\text{т. ср}}$ — начальное и текущее средневзвешенное давление.

Глава VIII

НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ПРИТОК К СКВАЖИНАМ

§ 30. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТОВ ПО НЕУСТАНОВИВШЕМУСЯ ПРИТОКУ ЖИДКОСТИ

Для целей проектирования и анализа разработки необходимо по наблюдениям за скважинами определить следующие комплексы параметров:

$$\frac{k\rho_0}{\mu_0}, \quad \alpha, \quad \gamma=\frac{\alpha}{\beta}, \quad D^2=\frac{k_0}{\mu_0 m_0 \alpha}=\frac{\varkappa}{\gamma}. \tag{30.1}$$

Скважины на неустановившихся режимах работы исследуют в основном путем:

1) снятия кривых восстановления забойного давления после остановки эксплуатационной или нагнетательной скважины;

2) пьезоразведки скважин и пластов (гидропрослушивание пласта), при которой фиксируют влияние изменения режима работы возмущающей скважины на характер изменения давления в соседних реагирующих скважинах.

В основу расшифровки данных почти всех видов исследования скважин берут приближенные решения нелинейного уравнения (21.16), соответствующие первому приближению при линеаризации Л. С. Лейбензона (см. § 25). При этом обобщение известных в линейной теории упругого режима методов обработки данных исследования на случай нелинейно-упругого режима фильтрации капельной жидкости достигают путем замены в расчетных формулах давления p на функцию $u = (1/\alpha)\exp[\alpha(p - p_0)]$, а дебита Q на $G\rho_0^{-1}$. Здесь коэффициент изменения параметров α предварительно определяют по данным расшифровки результатов исследования скважин на установившихся режимах, т. е. по данным расшифровки индикаторных линий (см. § 28).

Рассмотрим сначала *метод обработки кривых восстановления давления* в скважинах после их внезапной остановки. Этот метод основан на следующей исходной схематизации происходящих в пласте процессов. До остановки скважины ее дебит G предполагается установившимся во времени, что соответствует стационарному рас-

пределению давления в пласте, удовлетворяющему уравнению Лапласа относительно функции $u(r, t)$.

Предполагается, что соседние скважины долгое время работали и продолжают работать без изменения режима. Исследование скважины заключается в остановке ее в момент времени $t = 0$ и в регистрации во времени изменения давления. Распределение функции $u(r, t)$ в пласте при $t \geqslant 0$ представляется в виде

$$u(r, t) = u_0(r) + \frac{G_0\mu_0}{2\pi k_0\rho_0 h} v(r, t), \tag{30.2}$$

$$u_0(r) = e^{-\alpha[p_0 - p(r)]}/\alpha, \qquad u(r, t) = e^{-\alpha[p_0 - p(r, t)]}/\alpha,$$

здесь $u_0(r)$ — функция распределения давления до остановки скважины на расстоянии r от оси скважины.

Тогда для функции $v(r, t)$ при осесимметричном движении имеем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{dv}{dr}, \qquad v(r, 0) = 0, \tag{30.3}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности.

Согласно определению (30.2) функция $v(r, t)$ на стенке скважины ($r = r_c$) должна удовлетворять следующему первому условию:

$$v(r_c, t) = u_c(t) - u_{c0} = \frac{2\pi k_0\rho_0 h}{G_0\mu_0}\left\{e^{-\alpha(p_0 - p_c(t))} - e^{-\alpha(p_0 - p_{c0})}\right\}, \tag{30.4}$$

где $u_c(t)$ — функция забойного давления в момент t; u_{c_0} — функция забойного давления в начальный момент до остановки скважины при $t = 0$.

Второе условие на стенке скважины получаем дифференцированием (30.2) по r

$$\frac{2\pi k_0 h\rho_0}{\mu_0}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=r_c} = \frac{2\pi k_0\rho_0 h}{\mu_0}\left(r\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)_{r=r_c} + G_0\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=r_c},$$

$$G_0 = \frac{2\pi k_0 h\rho_0}{\mu_0}\left(r\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)_{\substack{r=r_c \\ t=0}}. \tag{30.5}$$

Здесь левая часть уравнения равна продолжающемуся текущему притоку $G(t)$ жидкости (из скважины или в скважину) после ее остановки. Первый член правой части уравнения равен постоянному значению дебита скважины G_0 до ее остановки. С учетом изложенного выше имеем окончательно второе уравнение на стенке скважины

$$\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=r_c} = -\frac{G_0 - G(t)}{G_0}. \tag{30.6}$$

При мгновенном прекращении притока жидкости после остановки скважины $G(t) = 0$, и тогда уравнение (30.6) имеет вид

$$\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=r_c} = -1. \tag{30.7}$$

Приближенное решение уравнения (30.3) при условиях $v(r, 0) = 0$ и (30.7) для достаточно большого времени, как известно, имеет вид

$$v(r, t) = \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r^2}. \tag{30.8}$$

Введение сюда функции $u(r, t)$ и последующее удовлетворение первому условию (30.4) на стенке скважины позволяет получить основную расчетную формулу

$$\Delta u = \frac{G_0\mu}{4\pi k_0\rho_0 h} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r_c^2}, \tag{30.9}$$

$$\Delta u = \frac{\exp[-\alpha(p_0 - p(t))] - \exp[-\alpha(p_0 - p_{c0})]}{\alpha},$$

справедливую для достаточно малых r (т. е. при $r = r_c$). Формулу (30.9) можно представить еще и в другом виде

$$\Delta u = \frac{G_0\mu}{4\pi k\rho h} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r_c^2}; \qquad \Delta u = \frac{e^{\alpha[p(t) - p_{c_0}]} - 1}{\alpha};$$

$$\frac{k\rho}{\mu} = \frac{k_0\rho_0}{\mu_0} e^{\alpha(p_0 - p_{c_0})}. \tag{30.9а}$$

Подчеркнем, что здесь $p(t) - p_{c_0} = f(t)$ — известная (из наблюдений за скважинами) функция.

Для определения искомых параметров обычно кривую восстановления давления перестраивают в координатах $\Delta u - \ln t$ или $\Delta p - \ln t$. При этом предполагается — на основании (30.9), — что опытные точки должны лечь на прямую линию с угловым коэффициентом B, которая отсекает на оси Δu отрезок A

$$A = B \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r_c^2}, \qquad B = \frac{G\mu}{4\pi k\rho h}. \tag{30.10}$$

Таким образом, указанное графическое представление опытных данных позволяет найти величины A и B, а затем при известных остаточных величинах и параметры k и $\varkappa/r_c^2$. Этот метод наиболее распространен и известен под названием «метода касательных» [225].

Однако, несмотря на очевидную простоту, в некоторых случаях он оказался малоэффективным. Так, при построении кривых восстановления давления в координатах $\Delta u - \ln t$ (или $\Delta p - \ln t$) реальная кривая не дает ожидаемого асимптотического прямого участка, что вносит определенный произвол при выборе интервала, соответствующего формуле (30.9). Это происходит, в частности, из-за неточности работы манометра при регистрации давления или из-за неоднородности призабойной зоны пласта. Принято думать, что наиболее существенная причина, определяющая резкое искривление прямой (30.9) в указанной системе координат, состоит в следующем. Из-за сжимаемости жидкости и газа в стволе скважины приток жидкости к ней после закрытия устья не прекращается мгновенно, что несколько замедляет процесс восстановления давления. При использовании полулогарифмических координат дефектный (из-за продолжающегося притока) участок (отрезок Δt на рис. 45) кривой восстановления давления

растягивается, а основной участок ($T - \Delta t$), где T — полное время восстановления давления) сужается. Поэтому при обработке кривой в этих координатах трудно избежать ошибок, вносимых начальным дефектным участком.

Авторы всех известных нам методов [15, 32, 226, 229, 233] стремились предложить способы обработки кривых восстановления, которые позволили бы учесть влияние продолжающегося притока жидкости. Однако можно заметить, что в координатах $\Delta u - t$ или $\Delta p - t$ начальный участок Δt кривой играет менее существенную роль, чем в «методе касательных». Постараемся воспользоваться этим фактом в предлагаемом ниже простейшем интегральном способе. Введем безразмерную функцию

$$z(t) = \frac{\int_0^t \Delta u\, dt}{\Delta u t}, \qquad (30.11)$$

где значения Δu или Δp и t берут с обрабатываемой кривой восстановления давления, а параметр α, как уже указывалось, — по данным об установившемся притоке (см. § 28). Интеграл $\int_0^t \Delta u dt$ можно вычислить численно, т. е. значения функции $z(t)$ — известные величины. С другой стороны, из уравнений (30.9) и (30.10) следует, что

$$z(t) = \frac{\ln(2{,}25\varkappa t/r_c^2) - 1}{\ln(2{,}25\varkappa t/r_c^2)}. \qquad (30.12)$$

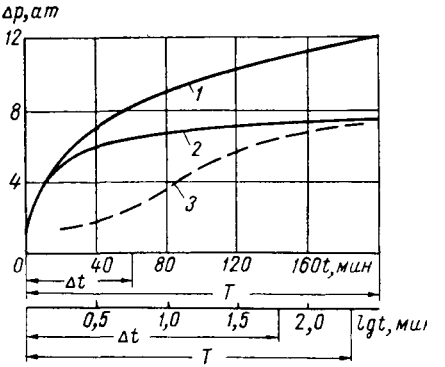


Рис. 45. Кривые восстановления давления:

1 — разведочной скважины; *2* — скв. 237 в координатах $\Delta p - t$; *3* — то же в координатах $\Delta p - \lg t$.

Отсюда имеем следующие соотношения:

$$\frac{\varkappa}{r_c^2} = \frac{\exp[1/(1-z)]}{2{,}25t}, \quad k = \frac{G\mu}{4\pi\,\Delta u h\,(1-z)\,\rho}. \qquad (30.13)$$

Параметры пласта при линейном притоке жидкости определяют так же, как и для нелинейного притока, с той лишь разницей, что для расшифровки кривую восстановления давления строят непосредственно в координатах $\Delta p - t$.

В качестве примера подсчета по предлагаемому способу были определены параметры пласта для одной разведочной скважины и скв. 237 Соколовогорского месторождения (здесь $\alpha = 0$, индикаторная линия — прямая).

Полученные согласно предложенному способу значения проницаемости, соответственно равные 27 и 226 *мд*, близки к результатам подсчетов по интегральному методу [15], в котором используют трансформанты Лапласа от кривых восстановления давления. Предлагаемый здесь способ, использующий интеграл с переменным верхним пределом от кривой восстановления давления, хотя и дает несколько отличные результаты, нежели по методу, предложенному

в [15], но отличается от последнего большой простотой необходимых расчетов. Кроме того, продолжающийся приток в скважину мало сказывается на результатах по предлагаемому способу, так как дефекты участка незначительно меняют величину указанного интеграла при $t > \Delta t$.

Укажем, что предложенный способ можно распространить и для расшифровки кривых восстановления давления в скважинах при непроницаемой границе и в скважинах с постоянным давлением на контуре питания. Так, в работе [9] предлагается следующая формула для восстановления давления в скважине, вскрывающей ограниченный пласт с непроницаемой границей,

$$\Delta p = \frac{3}{2}\frac{Q\mu}{4\pi kh}\exp\left\{\left[-\frac{40}{7}\frac{\varkappa}{R}(t-t_+)\right]\left[\frac{5}{9}-\frac{r_c^2}{R^2}+\frac{4}{9}\frac{r_c^3}{R^3}\right]\right\}, \quad (30.14)$$

здесь R — радиус залежи; t_+ — время, за которое область влияния скважины дойдет до границы пласта, $t_+ = R^2/12\varkappa$; величины r_c^2/R^2 и r_c^3/R^3 обычно незначительны по сравнению с числом 5/9 и ими можно пренебречь. Тогда после ввода, как и выше, безразмерной функции $z(t)$ имеем формулы для коэффициентов проницаемости и пьезопроводности

$$k = \frac{Q\mu e^{1/z}}{1{,}025\pi\,\Delta p h}, \quad \varkappa = -0{,}63\frac{R^2}{zt} = \frac{\int_0^{t^*}\Delta p\,dt}{\Delta p t^*}. \quad (30.15)$$

Рассмотренный случай может быть в *«запечатанных» залежах* (линзах), у пород которых высокая проницаемость.

Далее, в работе [225] дается следующая приближенная формула для восстановления давления в скважине, вскрывающей пласт, ограниченной контуром с постоянным давлением

$$\Delta p = \frac{Q\mu\exp(-\beta t)}{1{,}560\pi kh}, \quad \Delta p = p_0 - p(r, t), \quad \beta = 5{,}784\frac{\varkappa}{R^2}. \quad (30.16)$$

Введем, как и выше, безразмерную функцию $z(t)$, тогда получим значения для коэффициентов проницаемости и пьезопроводности

$$k = \frac{Q\mu\exp(1/z)}{1{,}560\pi h\Delta p}, \quad \varkappa = 0{,}173\frac{R^2}{zt}, \quad z = \frac{\int_0^{t}\Delta p\,dt}{\Delta p t^*}. \quad (30.17)$$

Такой случай может быть *в пластах с активным напором краевых вод* или в небольших залежах с законтурным заводнением.

Коэффициенты проницаемости, рассчитанные по формуле (30.9), получаются приведенными к пластовому давлению p_0, тогда как коэффициенты проницаемости, рассчитанные по формулам (30.13) и (30.15), получаются приведенными для давления p_{c0}.

В работе [142] приведен ряд выпуклых индикаторных линий эксплуатационных скважин Малгобек-Вознесенского месторождения, представленного, по оценкам геологов, трещиноватыми породами.

По изложенной выше методике обработаны две индикаторные линии скв. 160-5. Данные исследования приведены на рис. 36.

Из данных исследований видно, что значительных остаточных деформаций не отмечалось. Результаты расчетов показывают, что значения параметров α и K для прямых ходов обеих индикаторных линий получались близкими, что позволило для данной скважины принять их средние значения равными $\alpha = 0{,}0177\ ат^{-1}$ и $K = 3{,}42\ т/сутки \cdot ат$. Следует отметить, что, поскольку при снятии обеих индикаторных линий пластовые давления были близкими и составляли соответственно 464,0 и 461,8 *ат*, то коэффициенты продуктивности получались также близкими и равными 8,45 и 8,42 *т/сутки · ат*. При большей разнице в пластовых давлениях коэффициенты продуктивности будут существенно различаться.

Результаты обработки двух кривых восстановления давления скв. 160-5 следующие. Начальное пластовое давление $p_0 = 464\ ат$, а текущее $p_к = 391\ ат$. Массовые дебиты до снятия первой и второй кривых восстановления составляли соответственно 318 и 230 *т/сутки*. Остальные исходные данные представлены в работе [142].

Кривые восстановления давления обрабатывали по обычному методу касательной — см. формулы (30.10) — при известном значении коэффициента α ($\alpha = 0{,}0177\ ат^{-1}$) из индикаторных линий. Следует отметить, что асимптотическую прямую (по углу наклона которых — см. формулу (30.9) — вычисляются параметры пласта) кривой восстановления давления проводили по четырем последним точкам, обработанным по методу наименьших квадратов. Основные результаты расчетов приведены в табл. 32, откуда видно, что значения комплекса параметров $kh\rho/\mu$ по методу касательной для обеих кривых восстановления давления получились соответственно равными 61,0 и 76,0 $д \cdot г/см^2 \cdot спз$. Такая разница объясняется тем, что до снятия кривых восстановления давления в скважинах были разные забойные давления (347,0 и 362,7 *ат*), что повлияло на изменение этих параметров. Как указывалось выше, значения комплекса параметров $kh\rho/\mu$, определенные согласно формуле (30.9), получаются приведенными, например, к начальному p_0 пластовому давлению, поэтому они получаются весьма близкими (482 и 455 $д \cdot г/см^2 \cdot спз$). Здесь расхождение составляет 5,6%. В то же время, если обрабатывать указанные две кривые восстановления давления по обычному методу касательных согласно линейной теории упругого режима (т. е. в координатах $\Delta p - \lg t$), то разница в определенных коэффициентах гидропроводности [142] составит 29%.

Таблица 32

Массовый дебит скважины перед остановкой, *т/сутки*	Комплекс параметров $kh\rho/\mu$, приведенный к давлению		
	$p_с\,(t=0)$	$p_к = 391\ ат$	$p_0 = 464\ ат$
318	61	132	482
230	76	126	455

Покажем теперь, что коэффициент изменения фильтрационных параметров можно определить по кривой восстановления давления, соответствующей двум различным начальным дебитам. Процесс восстановления давления при этом описывается формулами типа (30.9) кривых восстановления давления:

первой

$$\Delta u_1 = \frac{G_1\mu_0}{4\pi k_0\rho_0 h}\ln\frac{2{,}25\varkappa t}{r_с^2}, \quad \Delta u_1 = \frac{e^{-\alpha\,[p_0 - p'\,(t)]} - e^{-\alpha\,(p_0 - p'_{с0})}}{\alpha} \qquad (30.19)$$

и второй

$$\Delta u_2 = \frac{G_2\mu_0}{4\pi k_0\rho_0 h}\ln\frac{2{,}25\varkappa t}{r_с^2}, \quad \Delta u_2 = \frac{e^{-\alpha\,[p_0 - p''\,(t_2)]} - e^{-\alpha\,(p_0 - p''_{с0})}}{\alpha}, \qquad (30.20)$$

здесь p_0 — пластовое давление до снятия соответственно первой и второй кривых восстановления; p'_{c0} и p''_{c0} — забойные давления до остановки скважины; G_1 и G_2 — дебиты скважины соответственно до снятия первой и второй кривых восстановления давления.

Делением формулы (30.19) на (30.20) получаем соотношение

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{e^{-\alpha \Delta p_1} - e^{-\alpha \Delta p_{c1}}}{e^{-\alpha \Delta p_2} - e^{-\alpha \Delta p_{c2}}}, \tag{30.21}$$

$$\Delta p_1 = p_0 - p'(t), \quad \Delta p_2 = p_0 - p''(t),$$

$$\Delta p_{c1} = p_0 - p'_{c0}, \quad \Delta p_{c2} = p_0 - p''_{c0},$$

которое позволяет методом подбора найти значение коэффициента изменения параметров α.

Остановимся на расшифровке кривых восстановления давления при задании изменений проницаемостей в виде степеней функции $k = k_0 [1 - \alpha (p_0 - p)]^{n-1}$, где показатель степени может принимать значения $n = 2$ согласно работе [7], $n = 3$ согласно работе [114] и $n = 4$ согласно работе [67].

При этом формула, соответствующая процессу восстановления давления, выводится точно так же, как формула (30.9), и имеет вид

$$\Delta u(t) = \frac{\{1 - \alpha [p_0 - p(t)]\}^n - \{1 - \alpha [p_0 - p_{c0}]\}^n}{n\alpha} =$$

$$= \frac{G\mu}{4\pi k_0 \rho h} \ln \frac{2{,}25 \varkappa t}{r_c^2}. \tag{30.22}$$

Здесь снова для удобства расшифровки кривую восстановления давления следует перестраивать в координатах Δu — $\ln t$ или Δu — t (при известном значении коэффициента α), тогда параметры пласта $\frac{k_0 \rho h}{\mu}$ и $\frac{\varkappa}{r_c^2}$ определяют так же, как и выше. Значение коэффициента α также можно определить подбором по данным кривых восстановления давления, воспользовавшись формулой:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\{1 - \alpha [p_0 - p(t)_1]\}^n - \{1 - \alpha [p_0 - p_{c0_1}]\}^n}{\{1 - \alpha [p_0 - p(t)_2]\}^n - \{1 - \alpha [p_0 - p_{c0_2}]\}^n}. \tag{30.23}$$

Перейдем теперь к рассмотрению возможности использования данных *пьезоразведки* (*гидропрослушивания*) *пласта*. Снова, воспользовавшись линеаризацией Л. С. Лейбензона, удается весьма просто обобщить известные методы линейной теории упругого режима фильтрации [38, 231] на случай нелинейно-упругих эффектов. Рассмотрим соответствующие видоизменения трех из них.

1. *Метод, основанный на использовании точки перегиба.*

Предположим, что отбор (нагнетание) жидкости на возмущающей скважине изменяется в момент времени t на величину ΔG, но остается

таким в последующем. Тогда изменение давления в реагирующей скважине будет описываться следующей формулой:

$$\Delta u = -\frac{\Delta G \mu_0}{4\pi k_0 \rho_0 h} Ei\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right),$$

$$\Delta u = \frac{e^{-\alpha \Delta p(t)} - e^{-\alpha \Delta p_c}}{\alpha}, \tag{30.24}$$

$$\Delta p(t) = p_0 - p(t), \quad \Delta p_c = p_0 - p_{c0},$$

здесь ΔG — величина, на которую изменили дебит возмущающей скважины; R — расстояние между возмущающей и реагирующей скважинами; p_{c0}, $p(t)$ — давления в реагирующей (наблюдательной) скважине соответственно до и после изменения режима работы возмущающей скважины.

Можно показать, что и при нелинейно-упругом режиме кривую реагирования следует строить в координатах $\Delta u - t$ и по ней определить характерные точки.

а. В точке перегиба имеем

$$\frac{d^2 \Delta u(t)}{dt^2} = 0 \tag{30.25}$$

или согласно формуле (30.24)

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{-Ei\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right)\right\} = 0. \tag{30.26}$$

Отсюда коэффициент пьезопроводности $\varkappa$ определяется по времени t_n перегиба кривой $\Delta u(t)$ на реагирующей скважине

$$\varkappa = \frac{R^2}{4t_n}. \tag{30.27}$$

б. Если при исследовании одной и той же пары скважин в возбуждающей скважине дважды изменять дебит (ΔG_1 и ΔG_2), а в реагирующей скважине, следовательно, снимать две кривые изменения давления, то это позволит определить коэффициент α. Процесс изменения давления в реагирующей скважине в обоих случаях описывается формулами:

$$\Delta u_1 = \frac{\Delta G_1 \mu_0}{4\pi k_0 \rho_0 h} Ei\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right], \quad \Delta u_1 = \frac{e^{-\alpha \Delta p(t)_1} - e^{-\alpha \Delta p_{c1}}}{\alpha}, \tag{30.28}$$

$$\Delta u_2 = \frac{\Delta G_2 \mu_0}{4\pi k_0 \rho_0 h} Ei\left[-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right], \quad \Delta u_2 = \frac{e^{-\alpha \Delta p(t)_2} - e^{-\alpha \Delta p_{c2}}}{\alpha}. \tag{30.29}$$

Разделим формулу (30.28) на (30.29)

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} = \frac{e^{-\alpha \Delta p(t)_1} - e^{-\alpha \Delta p_{c1}}}{e^{-\alpha \Delta p(t)_2} - e^{-\alpha \Delta p_{c2}}} = \frac{\Delta G_1}{\Delta G_2}. \tag{30.30}$$

Отсюда подбором можно определить коэффициент изменения параметров α.

в. Определим значение гидропроводности пласта $k_0\rho_0 h/\mu_0$. Из формул (30.24) и (30.18) имеем

$$\Delta u_n = -\frac{\Delta G \mu_0}{4\pi k_0 \rho_0 h} Ei\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t_n}\right) = 0{,}0043\,\frac{\Delta G \mu_0}{k_0 \rho_0 h}. \qquad (30.31)$$

Отсюда получаем формулу для гидропроводности пласта

$$\frac{k_0\rho_0 h}{\mu_0} = 0{,}0043\,\frac{\Delta G}{\Delta u_n}, \quad \Delta u_n = \frac{e^{-\alpha\,[p_0 - p(t)_n} - e^{-\alpha\,(p_0 - p_{c0})}}{\alpha}, \qquad (30.32)$$

здесь Δu_n — функция давления на реагирующей скважине в момент времени, соответствующий точке перегиба t_n.

При известных значениях плотности жидкости ρ_0, полученных при лабораторных исследованиях, и мощности пласта h, определенной электрометрически, по формуле (30.32), как и обычно, можно затем определить коэффициент подвижности

$$\frac{k_0}{\mu_0} = 0{,}0043\,\frac{\Delta G}{\Delta u_n \rho_0 h}. \qquad (30.33)$$

г. Далее попытаемся определить коэффициент эффективной сжимаемости пор и жидкости β. Коэффициент пьезопроводности $\varkappa$, согласно формуле (30.27), можно представить в виде

$$\varkappa = \frac{k_0}{\mu_0 m \beta} = \frac{R^2}{4t_n}. \qquad (30.34)$$

Отсюда определим

$$\beta = \frac{4k_0 t_n}{\mu_0 m R^2}, \quad \beta = 0{,}0043\,\frac{4t_n \Delta G}{m R^2 \Delta u_n \rho_0 h}. \qquad (30.35)$$

Таким образом, если привлечь независимое определение величин ρ_0, h, то оказывается возможным по данным расшифровки кривых реагирования пьезоразведки определить значения коэффициентов α и β, а следовательно, оценить показатель степени $\gamma = \alpha/\beta$.

2. *Метод, основанный на использовании точки касания.*

Построим кривую изменения давления в реагирующей скважине в координатах $\Delta u\ (t) - t$, затем проведем касательную к этой кривой из начала координат. В точке касания имеем

$$\left[\frac{d[\Delta u\ (t)]}{dt}\right]_{t=t_к} = \frac{\Delta u\ (t_к)}{t_к}, \qquad (30.36)$$

где $t_к$ — время, соответствующее точке касания.

Исходя из выражения (30.36), имеем

$$\varkappa = 0{,}57\,\frac{R^2}{t_к}. \qquad (30.37)$$

Из формул (30.24) и (30.37) получаем выражение для гидропроводности пласта

$$\frac{k_0\rho_0 h}{\mu_0} = 0{,}051\frac{\Delta G}{\Delta u_к}, \quad \Delta u_к = \frac{e^{-\alpha[p_0 - p(t_к)]} - e^{-\alpha[p_0 - p_{c0}]}}{\alpha}. \quad (30.38)$$

Коэффициент сжимаемости пор и жидкости β оценивается согласно формуле (30.37)

$$\beta = \frac{k_0 t_к}{0{,}57\mu_0 m R^2} \text{ или } \beta = 0{,}09\frac{\Delta G t_к}{\Delta u_к \rho_0 h m R^2}. \quad (30.39)$$

3. *Метод, основанный на использовании точки максимума.*

Пусть дебит возмущающей скважины изменен на период исследования на величину ΔG_1. Через некоторое время в возмущающей скважине устанавливается начальный или другой дебит. При этом кривая изменения давления в реагирующей скважине в зависимости от характера изменения режима работы возмущающей скважины будет иметь максимум или минимум.

В данном случае изменение давления в реагирующей скважине описывается зависимостью

$$\Delta u(t) = \frac{\Delta G_1 \mu_0}{4\pi k_0 \rho_0 h}\left[-Ei\left(-\frac{R^2}{4\varkappa t}\right)\right] - \frac{\Delta G_2 \mu_0}{4\pi k_0 h \rho_0}\left[-Ei\left(-\frac{R^2}{4\varkappa(t-t_0)}\right)\right], \quad (30.40)$$

здесь t — время, отсчитываемое с момента первого изменения режима работы возбуждающей скважины; t_0 — промежуток времени между моментами первого и второго изменения режима работы возмущающей скважины.

Очевидно, что в точке максимума $t = t_{max}$ имеем

$$\frac{d\Delta u(t)}{dt} = 0. \quad (30.41)$$

Тогда с учетом формул (30.40) и (30.41) получим выражение для коэффициента пьезопроводности

$$\varkappa = \frac{R^2 t_0}{4(t_{max} - t_0)\, t_{max} \ln \dfrac{t_{max}}{t_{max} - t_0}}. \quad (30.42)$$

4. Перечисленные выше методы расшифровки данных исследования пьезоразведкой основаны на решениях линеаризованного уравнения. Покажем, что это можно сделать, не прибегая к линеаризации [173].

Предположим сначала, что скважина, по данным об отборах из которой желательно определить указанные величины, вскрывает безграничный пласт, начальное давление в котором p_0. Естественно сначала реализовать наиболее простой поток жидкости в окрестности этой скважины — пустить ее с постоянным массовым дебитом G. При этом распределение давления вокруг нее автомодельно, т. е. $p(r, t) = p(r/\sqrt{t})$, и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\xi\frac{du}{d\xi} + \xi^2\frac{d(u^{1/\gamma} - 1)}{d\xi} = 0, \quad u = e^{\alpha\Delta p}, \quad \Delta p = p - p_0, \quad (30.43)$$

$$\xi = r/\sqrt{2D^2 t},$$

эквивалентному, как легко видеть, уравнению (24.5). Решения уравнения (30.43) для разных значений параметра γ в практически интересных случаях (при относительно малых значениях произведения $\alpha\lambda$) весьма близки друг к другу и, в частности, к решениям линейного уравнения, когда $\gamma = 1$. Другими словами, можно считать, что $u(\gamma, \xi) = u(1, \xi)$, т. е. воспользоваться линеаризацией Л. С. Лейбензона.

Однако для расшифровки измеренных давлений по линеаризованному уравнению необходимо заранее знать коэффициент α, поскольку $u(1, \xi) = \exp \alpha (p - p_0)$, а в работающей или в соседних наблюдательных скважинах замеру поддается функция $p = p(t)$. Кроме того, использование линеаризованного уравнения позволяет определить, хотя бы по формуле (30.10), коэффициент $\varkappa = k_0/(\mu_0 m_0 \beta)$ и параметр λ/G, т. е. только из наблюдений за скважинами не удается найти в отдельности упругоемкость пласта β.

Покажем, что параметр β можно определить, если не прибегать к линеаризации и воспользоваться некоторым интегральным соотношением, выведенным в работе [14] для случая $\gamma = 2$. Для этого проинтегрируем уравнение (30.43) от точки ξ_1 до бесконечности

$$\left[\xi \frac{du}{d\xi}\right]_{\xi_1}^{\infty} + \left[\xi^2 \left(u^{1/\gamma} - 1\right)\right]_{\xi_1}^{\infty} - 2 \int_{\xi_1}^{\infty} \xi \left(u^{1/\gamma} - 1\right) d\xi = 0. \qquad (30.44)$$

Если теперь положить $\xi_1 = 0$ и использовать граничные условия (24.5), то получим исходное интегральное соотношение

$$\alpha\lambda = 2 \int_0^{\infty} \xi \left(u^{1/\gamma} - 1\right) d\xi. \qquad (30.45)$$

Теперь предположим, что скважина пускается сначала с одним дебитом G_1, а затем с другим, также известным и равным G_2, и пусть в обоих случаях в одной из скважин пласта записывается кривая снижения (повышения) давления $p(t)$. Поскольку расстояние между скважиной наблюдения и работающей скважиной известно и равно r, указанную кривую можно пересчитать в координатах $p(\xi)$, $\xi = r/\sqrt{t}$. Кроме того, заметим, что $u^{1/\gamma} = \exp \beta (p - p_0)$. Тогда из формулы (30.45) следует

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\int_0^{\infty} \xi \left(e^{\beta (p_1(t) - p_0)} - 1\right) d\xi}{\int_0^{\infty} \xi \left(e^{\beta (p_2(t) - p_0)} - 1\right) d\xi}. \qquad (30.46)$$

Соотношение (30.46) позволяет путем подбора найти параметр β, так как левая часть его известна. Разумеется, здесь существенно пренебрегается эффектом необратимости деформаций пласта.

По нестационарному притоку жидкости к скважинам в условиях нелинейно-упругого режима фильтрации можно также определить наличие непроницаемых границ в пластах, как и при линейно-упругом режиме фильтрации [8, 16, 31], путем исследования кривых восстановления давления. Однако линеаризация Л. С. Лейбензона может оказаться при этом (из-за существенности второй фазы движения) недостаточной.

Можно предложить также следующий способ. Скважины пускают с постоянным дебитом, а в ряде соседних замеряют давление как функцию времени. Если графики давления, пересчитанные как функ-

ции переменной $\xi = r/2\sqrt{t}$ (где r — расстояние скважины записи от пускаемой в работу), сливаются (течение автомодельно), то непроницаемая граница далека и пласт можно считать бесконечным. Если они расходятся, то это говорит о нарушении автомодельности. Если же кривые сливаются на одних участках переменной ξ и расходятся на других, то можно сделать вывод о наличии непроницаемой границы, о замкнутости пласта и, более того, пользуясь приведенными здесь расчетами, можно разработать способ определения расстояния до нее.

Примеры такого расхождения кривых давления для жидкости, записанных в наблюдательных скважинах, известны давно, однако далеко не всегда им давалось правильное толкование. Теоретические графики кривых давления в замкнутых пластах при $\gamma = 1$ приведены в монографии Маскета [141]. Задаче нахождения непроницаемой границы в линейном случае посвящены работы [31] и др.

§ 31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЯ ГАЗОВЫХ СКВАЖИН ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ ФИЛЬТРАЦИИ

В настоящее время на практике используют два метода исследования газовых скважин при нестационарных режимах фильтрации: метод пуска (обработка кривой стабилизации давления) и метод остановки (обработка кривой нарастания давления) скважин.

I. Идеальный газ, пласт недеформируемый

Как было показано выше, предположение об идеальности газа и пласта оправдано, когда отношение забойного давления в работающей скважине к пластовому давлению больше 0,9. Рассмотрим две соответствующие модельные задачи: пуск скважины с постоянным дебитом (или мгновенная остановка скважины, работавшей на постоянном режиме) и пуск скважины с переменным дебитом (или приток в скважину после закрытия). Для первого случая, воспользовавшись линеаризованным уравнением (25.1) и методом укрупненной скважины [1], из формулы (25.3) получим:

а) для пуска скважины

$$p_{\text{пл}}^2 - p_{\text{с}}^2 = \beta Q \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{R_{\text{с. пр}}^2} + bQ^2, \tag{31.1}$$

$$\beta = \frac{\mu p_{\text{ат}} z T_{\text{пл}}}{2\pi k h T_{\text{ст}}};$$

б) для остановки скважины

$$p_{\text{с}}^2 - p_{\text{с0}}^2 = \beta Q_0 \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{R_{\text{с. пр}}^2} + bQ_0^2, \tag{31.2}$$

[1] Здесь излагается методика, учитывающая инерционные отклонения от закона Дарси в призабойной зоне. Соответствующий аналог формулы (25.3) выводится ниже — см. формулу (32.9).

где p_{c0} и Q_0 — забойное давление и дебит скважины перед остановкой.

Второму случаю соответствует следующее решение линеаризованного уравнения, построенное методом интегральных соотношений (распределение давления задается в виде полинома из семи членов):

а) для пуска скважины

$$p_{пл}^2 - p_c^2 = \beta Q \ln \frac{2{,}05\varkappa}{R_{c.\,пр}^2} \frac{Q_{доб}}{Q} + bQ^2, \qquad (31.3)$$

$$Q_{доб} = \int Q(t)\, dt;$$

б) для остановки скважины

$$p_c^2 - p_{c0}^2 = \beta (Q_0 - q) \ln \frac{2{,}05\varkappa}{R_{c.\,пр}^2} \frac{Q_0 t - q_{доб}}{Q_0 - q} + b (Q_0^2 - q^2), \qquad (31.4)$$

где $q(t)$ — приток в скважину после закрытия.

Кривые нарастания давления обрабатывают по формулам (31.2) и (31.4). Для этого кривую нарастания строят в координатах p_c^2, $\lg t$ или $\frac{p_c^2 - p_{c0}^2}{Q_0 - q} - b(Q_0 - q)$, $\lg \frac{Q_0 t - q_{доб}}{Q_0 - q}$. По наклону прямолинейного участка кривой и по отсекаемым отрезкам, как и при обычном методе касательных (см. § 30), определяют коэффициент β, по которому затем вычисляют параметр проводимости kh/μ и проницаемости пласта k.

Кривые стабилизации давления снимают обычно при исследовании скважины методом установившихся отборов на каждом режиме. Кривая стабилизации давления согласно формуле (31.3), преобразованной к виду

$$\frac{p_{пл}^2 - p_c^2}{Q(t)} - bQ(t) = \alpha + \beta\varphi(t), \quad \alpha = \beta \ln \frac{2{,}05\varkappa}{R_{c.\,пр}^2}, \quad \varphi = \ln \frac{Q_{доб}}{Q}, \qquad (31.5)$$

должна быть прямой линией, а по коэффициентам α и β, определяющим ее положение, можно вычислить параметры kh/μ и $\varkappa$.

Если коэффициент b не удается определить по стационарным испытаниям, то кривые стабилизации давления строят в координатах, в которых формула [102]

$$\frac{\psi(t)_к - \psi(t)}{Q(t) - Q(t_к)} = \beta \frac{\varphi(t_к) - \varphi(t)}{Q(t) - Q(t_к)} - b \qquad (31.6)$$

описывает прямую линию. Здесь $\psi(t) = (p_{пл}^2 - p_c^2)/Q(t)$; $t_к$ — одна из конечных точек на кривой стабилизации давления.

Расчет проводят по одной точке $t_к$, так как принятые при выводе формулы (31.5) допущения наименьшим образом сказываются на конечных участках кривой. Положение прямой линии будет определять коэффициенты β и b. Зная b и обработав еще раз кривую стабилизации, но уже по формуле (31.5), можно определить коэффициент α. При

Таблица 33

№ режима	t, сек	p_c, ат	$Q \cdot 10^6$, см³/сек	$\psi = \frac{p_{пл}^2 - p_c^2}{Q} \cdot 10^3$	$\varphi = \lg \frac{\int_0^t Q(t)\,dt}{Q}$	$[Q - Q(t_к)] \cdot 10^6$	$[\psi(t_к) - \psi] \cdot 10^3$	$\psi(t_к) - \varphi$	$\lg t$	$\left[\frac{\psi(t_к) - \psi}{Q - Q(t_к)}\right] \cdot 10^{-3}$	$\left[\frac{\varphi(t_к) - \varphi}{Q - Q(t_к)}\right] \cdot 10^{-3}$	$\left[\frac{\psi(t_к) - \varphi}{\varphi(t_к) - \varphi}\right] \cdot 10^{-3}$	$\left[\frac{Q - Q(t_к)}{\varphi(t_к) - \varphi}\right] \cdot 10^6$	$(\psi - bQ) \cdot 10^{-3}$
	0	220,5	0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	600	182,0	7,801	1,986	2,9419	0,425	0,618	1,0985	2,78	1,454	2,585	0,563	0,387	1,635
2	1200	176,1	7,708	2,025	3,2531	0,332	0,579	0,7873	3,08	1,744	2,371	0,735	0,422	1,678
3	2400	174,15	7,616	2,4525	3,4800	0,240	0,2016	0,5604	3,38	0,840	2,335	0,36	0,428	2,0595
4	3600	173,57	7,535	2,4546	3,6293	0,159	0,1495	0,4111	3,56	0,94	2,585	0,364	0,387	2,1156
5	4800	173,12	7,477	2,4945	3,7401	0,101	0,1096	0,3003	3,68	1,085	2,973	0,365	0,336	2,1585
6	6000	172,75	7,434	2,5256	3,8282	0,058	0,0785	0,2122	3,78	1,353	3,659	0,368	0,273	2,1911
7	7200	172,87	7,407	2,5523	3,9008	0,031	0,0518	0,1396	3,86	1,655	4,46	0,370	0,224	2,219
8	8400	171,6	7,390	2,5752	3,9627	0,014	0,0289	0,0777	3,92	2,079	5,59	0,372	0,179	2,2427
9	9600	171,5	7,376	2,6041	4,0404	0	0	0	3,98	—	—	—	—	2,2822

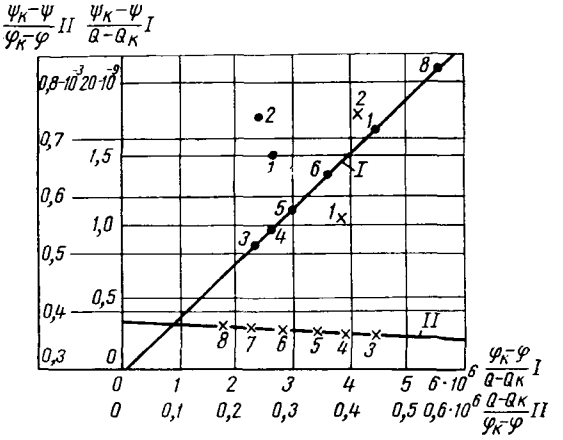


Рис. 46. Результаты обработки кривой стабилизации давления по скв. 117 Шебелинского месторождения по формулам (31.5) и (31.6) (номер точек соответствует номеру режима, см. табл. 33).

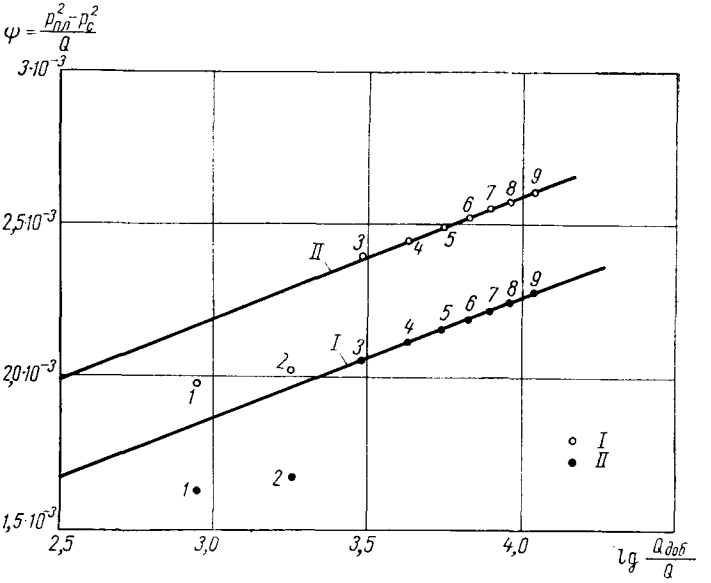


Рис. 47. Зависимость $\Delta p^2/Q$ от $\lg \frac{Q_{доб}}{Q}$ для скв. 117-Ш.

обработке по формуле (31.5) искривление будет на начальном участке, а при обработке по формуле (31.6) — на конечном участке.

Если кривые стабилизации давления снимать при постоянном дебите (Q = const), методика расчета упростится; обработку кривых можно производить по формуле

$$p_c^2 = \alpha_1 - \beta_1 \ln t, \tag{31.7}$$

$$\alpha_1 = p_{пл}^2 - \frac{\mu p_{ат} z T_{пл} Q}{2\pi k h T_{ст}} \ln \frac{2{,}05\varkappa}{R_{с.\,пр}^2} - bQ^2, \quad \beta_1 = \frac{\mu p_{ат} z T_{пл}}{2\pi k h T_{ст}} Q.$$

Имея несколько кривых для различных Q, можно из зависимости $\alpha_1 = f(Q)$ графически определить коэффициенты b и α. Кривые стабилизации дебита скважины при работе с постоянным забойным давлением обрабатывают по формулам (31.5) и (31.6).

Обработку кривых стабилизации давлений рассмотрим на примере скв. 117 Шебелинского месторождения при испытании ее на шайбе d = 25,4 *мм*. Данные измерения стабилизации давления и результаты обработки по формулам (31.5) и (31.7) приведены в табл. 33 и на рис. 46.

По прямой *I* рис. 46 определяем коэффициенты $b_1 = 0{,}05 \cdot 10^{-9}$ (*сек*/*см*^{3})^2 и $\beta_1 = 0{,}38 \cdot 10^{-3}$. Из приведенного примера видно, что ввиду очень малой величины коэффициент b трудно определить по формуле (31.6), поэтому кривую стабилизации лучше обрабатывать по видоизмененной формуле (31.6)

$$\frac{\psi(t_к) - \psi(t)}{\varphi(t_к) - \varphi(t)} = \beta - b \frac{Q(t) - Q(t_к)}{\varphi(t_к) - \varphi(t)}, \tag{31.6'}$$

где коэффициент b определяется как тангенс угла наклона.

Кривая стабилизации, обработанная по формуле (31.6′), представлена на рис. 46 прямой *II*, по которой определены коэффициенты $b_2 = 0{,}045 \cdot 10^{-9}$ (*сек*/*см*^{3})^2 и $\beta_2 = 0{,}38 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 47 (прямая *I*) приведены результаты обработки кривой стабилизации давления по формуле (31.5): $b = 0{,}45 \cdot 10^{-9}$ (*сек*/*см*^{3})^2. Нетрудно убедиться, что тангенс угла наклона прямой *I* равен $\beta = 3{,}8 \cdot 10^{-3}$. На этом же рисунке (кривая *II*) приведены результаты обработки кривой стабилизации без учета коэффициента b.

При практическом использовании этого метода нужно учитывать следующее:

1) для успешного применения формул (31.6) и (31.6′) нужна высокая точность как при измерении давлений и дебитов, так и при обработке результатов исследования;

2) в некоторых случаях изменения дебита будут настолько малы, что коэффициент b практически не будет влиять на результаты обработки кривой стабилизации по формуле (31.5);

3) если достаточно точно соблюдается закономерность (при $\omega \approx$ $\approx$ const)

$$Q(t) = Q_0 - \omega \lg\left(\frac{1}{Q}\int_0^t Q(t)\,dt\right) = Q_0 - \omega \lg \frac{Q_{доб}}{Q}, \quad \omega = \frac{Q(t) - Q(t_к)}{\varphi(t_к) - \varphi(t)},$$

то обработка кривой стабилизации давления по формулам (31.6) и (31.6′) будет невозможна из-за постоянства величины ω. Тогда следует прибегнуть к формуле

$$\frac{p_{\text{пл}}^2 - p_c^2(t)}{Q(t)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \ln \frac{Q_{\text{доб}}}{Q}, \tag{31.8}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\mu \rho_{\text{ат}} p_{\text{ат}} T_{\text{пл}}}{2\pi k h T_{\text{ст}}} \ln \frac{2{,}05\varkappa}{R_{\text{с. пр}}^2} + bQ_0, \quad \bar{\beta} = \beta - \omega b.$$

Чтобы определить все необходимые параметры, необходимо иметь хотя бы две кривых стабилизации с различными Q_0. Тогда из зависимости $\bar{\alpha} = f(Q_0)$ определяют коэффициент b, а затем и коэффициент β, предварительно вычислив коэффициент ω по зависимости $Q = f_1\left(\ln \frac{Q_{\text{доб}}}{Q}\right)$.

II. Реальный газ, пласт деформируемый

Неустановившаяся фильтрация в этом случае описывается уравнением (21.16) относительно функции Л. С. Лейбензона $\mathscr{P}$, причем линеаризованное уравнение (25.1) имеет вид [19]

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \tau} = \varkappa \nabla^2 \mathscr{P}, \quad \mathscr{P} = \int_0^p \frac{k(p)\, p}{\mu(p)\, z(p)}\, dp, \quad d\tau = \bar{\varkappa}(p)\, dt, \tag{31.9}$$

где $\varkappa(p)$ — функция от давления в какой-либо точке пласта.

Предположим, что между параметрами пласта и газа реализуется экспоненциальная связь (см. § 19, 21), тогда

$$\mathscr{P} = \frac{k_0}{\mu_0 z_0} \int_0^p p \exp[\alpha(p - p_0)]\, dt, \tag{31.10}$$

$$\alpha = \frac{1}{k}\frac{dk}{dp} - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dp} - \frac{1}{z}\frac{dz}{dp} = \text{const},$$

$$\tau = \int_0^t \frac{\exp \alpha_k (p - p_0)\, p}{\exp \alpha_\mu (p - p_0)\left(1 - \frac{z'}{z} p\right)}\, dt$$

и уравнение (31.9) запишется окончательно в виде

$$\varkappa_0 \nabla^2 \mathscr{P} = \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial \tau}, \quad \mathscr{P} = e^{\alpha p}(\alpha p - 1) + 1, \tag{31.11}$$

где $\varkappa_0 = k_0/m_0\mu_0$.

Решение уравнения (31.11) для работы единичной скважины в бесконечном пласте, как известно, можно представить в виде

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_{c0} - \frac{\mu_0}{4\pi k_0 h} \int_0^\tau \frac{G(\tau_1)}{\tau - \tau_1} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa_0(\tau - \tau_1)}}\, d\tau, \tag{31.12}$$

где $G(\tau_1)$ — весовой дебит скважины.

Для скважины, работающей с постоянным дебитом ($Q = \text{const}$), изменение функции $\mathscr{P}$ на ее стенке ($r = r_c$) будет определяться выражением

$$\Delta\mathscr{P} = \frac{G\mu_0}{4\pi k_0 h} Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa_0\tau}\right). \qquad (31.13)$$

Примем в формулах (31.12) — (31.13) и ниже, что $\tau = \tau(p_c)$, где p_c — давление на забое скважины.

Для больших τ справедливо представление

$$\Delta\mathscr{P} = \frac{G\mu_0}{4\pi k_0 h} \ln\frac{2{,}25\varkappa_0\tau}{r_c^2}. \qquad (31.14)$$

Сравним решение линеаризованного уравнения с численным решением нелинейного уравнения (21.16), полученным на ЭВМ [125] для случая $k = \text{const}$ и $z = 1$; тогда выражение (31.14) можно записать в виде

$$1 - p^{*2} = 0{,}575Q^* \ln 4{,}5\left(\frac{R_к}{r_c}\right)^2 \tau_1,\ \tau_1 = \frac{\varkappa_0 m_0}{2R_к^2}\int_0^t p^* d\theta, \qquad (31.15)$$

$$Q^* = \frac{2\mu p_{ат}}{\pi k h p_{пл}^2},\quad \theta = \frac{kp_к}{2m\mu R_к^2}t,\ p^* = p/p_{пл}.$$

Значения $\tau_1 = \tau_1(p_c)$ вычисляли по формуле трапеции

$$\tau_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^* - p_{i-1}^*}{2}(Q_1 - Q_{i-1}). \qquad (31.16)$$

В табл. 34 приводится сравнение значений забойного давления p_c^*, подсчитанных по формуле (31.15), с практически точным решением $p_{точн}^*$ [125] для различных значений Q^* при $\frac{R_к}{r_c} = 5000$.

Как видно из данных табл. 34, значение погрешности не превышает 0,75% даже при самых высоких значениях Q^*, что свидетельствует о высокой точности предлагаемой линеаризации (т. е. предположение, что $\tau = \tau(t)$) при принятых граничных условиях.

Для интерпретации результатов восстановления давления в газовых скважинах будем пользоваться решением линеаризованного уравнения (31.11), соответствующего нестационарному перераспределению давления после мгновенной остановки единичной скважины в бесконечном пласте

$$\mathscr{P}_c(\tau) = \mathscr{P}_{c0} + \frac{G\mu_0}{4\pi k_0 h}\ln\frac{2{,}25\varkappa_0}{r_c^2} + \frac{G\mu_0}{4\pi k_0 h}\ln\tau. \qquad (31.17)$$

Если результаты исследования скважины представить в координатах $\mathscr{P}_c$, $\ln\tau$, тангенс угла наклона прямолинейного участка этой кривой будет $\beta = G\mu_0/(4\pi k_0 h)$, а отрезок A, отсекаемый на оси ординат:

$$A = \mathscr{P}_{c0} + \frac{G\mu_0}{4\pi k_0 h}\ln\frac{2{,}25\varkappa_0}{r_c^2}.$$

Таблица 34

Q^*	Q	p_c^* по формуле (31.15)	$p^*_{\text{точн}}$	$\delta = \frac{p^*_{\text{точн}} - p_c^*}{p^*_{\text{точн}}} \cdot 100$
0,005	10^{-4}	0,9942	0,9945	+0,03
	10^{-3}	0,9927	0,9927	0,00
	10^{-2}	0,9913	0,9912	—0,01
	$3{,}2 \cdot 10^{-2}$	0,9894	0,9892	—0,02
0,01	$0{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,9891	0,9890	0,08
	$1{,}0 \cdot 10^{-4}$	0,9883	0,9886	0,03
	$1{,}0 \cdot 10^{-1}$	0,9764	0,9795	0,32
	$4{,}0 \cdot 10^{-1}$	0,9741	0,9763	0,22
0,05	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	0,9187	0,9184	—0,03
	$1{,}0 \cdot 10^{-2}$	0,9094	0,9088	—0,15
	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	0,9047	0,9040	—0,08
	$3{,}0 \cdot 10^{-2}$	0,9019	0,9012	—0,08
0,1	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$	0,9086	0,9155	+0,75
	$3{,}0 \cdot 10^{-5}$	0,8845	0,8843	—0,02
	$6{,}0 \cdot 10^{-5}$	0,8546	0,8528	—0,21
	$5{,}0 \cdot 10^{-4}$	0,8312	0,8287	—0,3

По значениям A и β можно вычислить комплексы параметров пласта $\varkappa_0/r_c^2$ и k_0h/μ_0.

Для интерпретации данных исследования скважины по формуле (31.17) необходимо знать зависимость функции $\mathscr{P}$ от давления p, которую можно построить по формуле (31.9) по известным $k\,(p)$, $\mu\,(p)$ и $z\,(p)$. Для экспоненциальных зависимостей параметров пласта и газа от давления входящую в формулу (31.10) величину коэффициента α лучше всего определять по результатам исследования газовой скважины при стационарных режимах фильтрации (см. § 28). Таким образом, для обработки результатов восстановления забойного давления в газовой скважине необходимо дополнительно иметь индикаторную кривую, по которой определяется величина α. Если индикаторная линия $\Delta p^2 = f\,(Q)$ — прямая, т. е. величина $\alpha = 0$, то при интерпретации результатов восстановления можно пользоваться методикой, изложенной в п. 1 этого параграфа (при $b = 0$).

Значение τ можно найти численным интегрированием кривой $\varkappa\,(p)$, t по формуле трапеций.

Построив зависимость $\mathscr{P}_c - \ln \tau$ и определив величину тангенса угла наклона прямолинейного участка кривой восстановления давления, из формулы (31.17) можно найти интересующие нас параметры пласта. Необходимо отметить, что значения параметров пласта при этом определяют уже приведенными к давлению p_0.

Отметим, что иногда удобно представлять соотношения типа (31.17) в виде

$$\mathscr{P}_c(\tau) = A + \frac{\beta}{2}\lg\tau^2 \qquad (31.18)$$

и обрабатывать результаты исследования скважины в координатах $\mathscr{P}_c$ — $\ln\tau^2$. Тогда тангенс угла наклона прямолинейного участка восстановления давления будет $\beta/2$, а коэффициент проводимости пласта определится по формуле $k_0h/\mu_0 = 8{,}73\,Q/\beta$, где Q — дебит газовой скважины в тыс. $м^3/сутки$. При этом величина β определяется более точно, так как прямолинейные участки кривой восстановления достаточно растянуты.

На Челбасском и Ленинградском газовых месторождениях Краснодарского края на скважинах, допускавших возможность создания больших депрессий, были проведены специальные исследования. На каждой исследуемой скважине замеряли индикаторные кривые, причем для всех точек индикаторной кривой фиксировали кривые восстановления и падения забойного давления. Индикаторные кривые и кривые восстановления забойного давления были получены и при прямом и при обратном ходе (увеличении и уменьшении дебитов). При этом, как правило, точки прямого и обратного хода совпадали, что говорит об отсутствии необратимых изменений проницаемости в данном случае.

По кривым зависимости дебита скважины от забойного давления (по индикаторным линиям) вначале определяли величину параметра α, учитывающую влияние изменений как коэффициента проницаемости, так и реальных свойств газа при уменьшении или увеличении давлений. Затем обрабатывали серию кривых восстановления забойного давления для каждой скважины, снятых после закрытия скважины, работавшей с различными установившимся дебитами.

На рис. 48 и 49 в качестве примера приведены результаты обработки кривых восстановления давления по скв. 31 Челбасского месторождения. Эти же кривые обрабатывали и по обычной теории упругого режима, и по формулам, учитывающим нарушение линейного закона фильтрации в призабойной зоне скважины (см. рис. 49).

В табл. 35 приведены результаты обработки серии кривых восстановления давления в скв. 31 Челбасского месторождения для различных начальных дебитов ($\alpha = 0{,}97\cdot10^{-2}\ ат^{-1}$).

Таблица 35

Q, $м^3/сутки$	p_{c0}, $ат$	Коэффициент проводимости			δ, %
		A	$Б$	$В$	
122 000	172,4	526,0	480,0	480,0	8,6
151 000	157,7	520,0	460,0	460,0	11,5
211 000	144,5	535,0	425,0	425,0	20,5
266 000	121,7	500,0	375,0	375,0	25,0
277 000	116,9	520,0	375,0	375,0	28,0

Примечание. Результаты обработки серии кривых: $А$ — по формуле (31.18), приведенные к начальному пластовому давлению; $Б$ — без учета кривизны индикаторной линии; $В$ — по формулам, учитывающим двучленный закон фильтрации; δ — относительная ошибка, допускаемая при неучете кривизны индикаторной линии (при использовании результатов $Б$ вместо $А$).

Из данных табл. 35 видно, что введение в расчеты зависимости свойств пласта (и газа) от давления при обработке кривых восстановления давления, соответствующих разным начальным дебитам Q, дает практически одинаковые результаты. Использование же обычных формул, основанных на предположении о движении идеального газа по недеформируемому коллектору, может привести к существенным расхождениям (в приведенном примере до 40%).

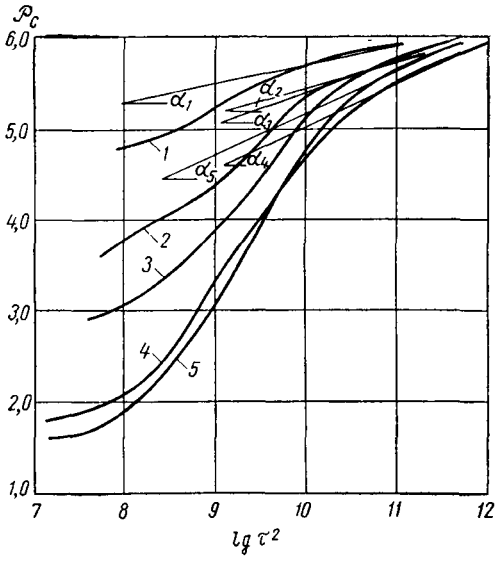


Рис. 48. Результаты обработки серии кривых восстановления давления по скв. 31 в координатах $\mathscr{P}_c - \lg \tau^2$:

Кривая	$Q_г$, м³/сутки	$\beta_i = \operatorname{tg} \alpha_i$
1	122 000	0,20
2	151 000	0,25
3	211 000	0,34
4	266 000	0,46
5	277 000	0,46

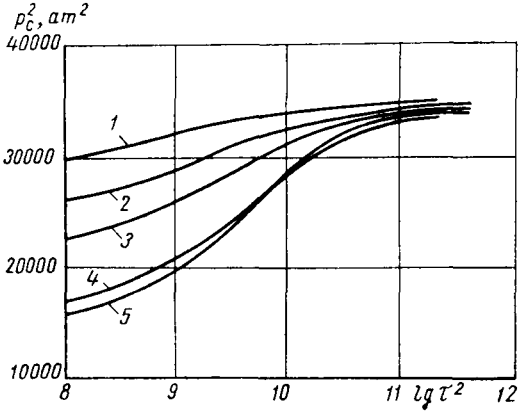


Рис. 49. Результаты обработки серии кривых восстановления давления по скв. 31 в координатах $p_c^2 - \lg \tau^2$:

Кривая	$Q_г$, м³/сутки	$\beta_i = \operatorname{tg} \alpha_i$
1	122 000	1550
2	151 000	1430
3	211 000	2160
4	266 000	3100
5	277 000	3220

§ 32. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ПРИТОКЕ К СКВАЖИНЕ В УСЛОЖНЕННЫХ УСЛОВИЯХ

Во многих случаях нестационарный приток жидкости или газа к скважине происходит в условиях, отличающихся от рассмотренной выше идеализированной схемы и существенно осложняющих правильную интерпретацию результатов измерений.

1. Несовершенство скважины по степени и характеру вскрытия пласта

По А. Л. Хейну [219] приток упругой жидкости к несовершенной по степени вскрытия пласта скважине, работающей с постоянным дебитом, описывается формулой

$$p_{\text{пл}} - p_{\text{с}} = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{R_{\text{с}}^2} + \frac{Q\mu}{\pi^2 kh\delta} [\varphi(\bar{\rho}_{\text{с}}, \delta) - \varphi_\alpha(\bar{\rho}_{\text{с}}, \delta, \alpha)], \quad (32.1)$$

где $\delta = \frac{h_{\text{в}}}{h}$ — степень вскрытия пласта; $h_{\text{в}}$ — вскрытая мощность; $\bar{\rho}_{\text{с}} = \frac{R_{\text{с}}}{h}$; $\alpha = \frac{R_{\text{с}}^2}{2\varkappa t}$.

Как видно из формулы (32.1), фильтрационное сопротивление, вызванное несовершенством скважины, четко разделяется на две части, одна из которых — $\varphi(\bar{\rho}_{\text{с}}, \delta)$ — не зависит от времени и характеризует сопротивление при стационарной фильтрации, вторая — $\varphi_\alpha(\bar{\rho}_{\text{с}}, \delta, \alpha)$ — зависит от времени. Из приведенных в работе [219] таблиц видно, что величина φ_α резко уменьшается со временем.

Для примера рассмотрим следующий случай: $\delta = 0{,}5$; $\bar{\rho}_{\text{с}} = 0{,}009$. Для этих условий $\varphi = 2{,}48$. Величина $\varphi_\alpha/\varphi < 0{,}1$ для $\alpha < 3 \cdot 10^{-3}$ и $\varphi_\alpha/\varphi < 0{,}01$ для $\alpha < 3 \cdot 10^{-4}$. Если принять, что $\varkappa = 10^3$—10^4 и $R_{\text{с}}^2 = 36$ *см*^{2}, то $t > (6 \div 60)$ *сек*. При этом следует отметить, что с увеличением степени вскрытия величина φ_α уменьшается еще быстрее. Таким образом, из решения, представленного формулой (32.1), следует, что через короткий промежуток времени изменение давления будет описываться формулой

$$p_{\text{пл}} - p_{\text{с}} = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{R_{\text{с}}^2} + \frac{Q\mu}{4\pi kh} C_1 = \frac{Q\mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{R_{\text{с. пр}}^2}, \quad (32.2)$$

где

$$R_{\text{с. пр}}^2 = R_{\text{с}}^2 e^{-C_1}, \quad C_1 = \frac{4}{\pi\delta} \varphi(\bar{\rho}_{\text{с}}, \delta),$$

C_1 — коэффициент, характеризующий несовершенство скважины.

2. Отличие параметров призабойной зоны от параметров пласта (скин-эффект)

Решение задачи для данного случая подробно проанализировано в работах [16, 240, 243] и др. Изложим здесь основной результат. При самых неблагоприятных условиях влияние призабойной

зоны сказывается лишь для времен, характеризующихся параметром $\varkappa t/R_c^2 < 10^4$. Для данной задачи с высокой точностью подходит метод введения фиктивной укрупненной скважины [240]. Сущность метода состоит в том, что вместо реальной скважины вводится фиктивная укрупненная скважина, радиус которой больше радиуса призабойной зоны. Внутри такой скважины распределение давления соответствует условиям стационарной фильтрации. При этом изменение забойного давления будет описываться формулой

$$p_{пл} - p_c = \frac{Q\mu}{4\pi kh}\left[\ln\frac{2{,}25\varkappa t}{R_{c.\,пр}^2} + S'\right], \tag{32.3}$$

где S' — параметр, учитывающий призабойную зону скважины, «скин-эффект».

3. Нарушение закона Дарси

Задачу о притоке газа к скважине при двучленном законе сопротивления решали на ЭВМ в работах [126, 150]. Рассмотрим приближенное решение этой задачи, изложенное в работе [150].

Изменение забойного давления скважины во времени для условий, когда $R > 10\,R_c$, описывается формулами

$$p_{пл}^2 - p_c^2 = \frac{Q\mu p_{ат} T_{пл} z}{\pi kh T_{ст}}\left(\ln\frac{R}{R_c} - \frac{1}{2}\right) + \frac{Q^2 \rho_{ат} p_{ат} T_{пл}^2 z}{\pi^2 h^2 l' T_{ст}^2 R_c}\left(1 - \frac{R_c}{R}\right), \tag{32.4}$$

$$\frac{R}{R_c} = R^* = \sqrt{8\,\frac{\varkappa}{R_c^2}\,t + 0{,}285\,\frac{\beta^{*2}}{R_c^2}\,Q^2} - 0{,}533\,\frac{\beta^*}{R_c}\,Q, \tag{32.5}$$

где $\beta^* = \rho_{ат} k/\pi h\mu l'$; $\rho_{ат}$ — плотность газа при $p_{ат}$, $T_{ат}$; l' — коэффициент макрошероховатости.

Интересно отметить, что при решении этой же задачи методом последовательной смены стационарных состояний формула для R^* имеет вид

$$R^* = \sqrt{4\,\frac{\varkappa}{R_c^2}\,t + 0{,}0625\,\frac{\beta^{*2}}{R_c^2}\,Q^2} - 0{,}25\,\frac{\beta^*}{R_c}\,Q. \tag{32.6}$$

Формулу (32.6) запишем в виде

$$R^* = \lambda\sqrt{8\tau}, \tag{32.7}$$

$$\tau = \frac{\varkappa t}{R_c^2}, \quad \lambda = \sqrt{1 + 0{,}0356\,\frac{\beta^{*2}Q^2}{R_c^2\tau}} - 0{,}189\,\frac{\beta^* Q}{R_c\sqrt{\tau}}. \tag{32.8}$$

Как видно из формулы (32.8), при $\tau \to \infty$ $\lambda \to 1$. В табл. 36 приведена зависимость коэффициента λ от времени τ и параметра $n = \dfrac{\beta^* Q}{R_c} = 0{,}01$ и 20.

Таблица 36

τ	$n=0{,}01$			$n=20$		
	$0{,}0356\left(\frac{n}{\sqrt{\tau}}\right)^2$	$0{,}189\frac{n}{\sqrt{\tau}}$	λ	$0{,}0356\left(\frac{n}{\sqrt{\tau}}\right)^2$	$0{,}189\frac{n}{\sqrt{\tau}}$	λ
10^3	$0{,}0356\cdot10^{-7}$	$0{,}566\cdot10^{-3}$	1,0	$0{,}1424\cdot10^{-1}$	0,1195	0,8855
10^4	$0{,}0356\cdot10^{-8}$	$0{,}189\cdot10^{-4}$	1,0	$0{,}1424\cdot10^{-2}$	0,0377	0,9623
10^5	$0{,}0356\cdot10^{-10}$	$0{,}566\cdot10^{-5}$	1,0	$0{,}1424\cdot10^{-4}$	$0{,}119\cdot10^{-3}$	0,9962
10^8	$0{,}0356\cdot10^{-12}$	$0{,}189\cdot10^{-6}$	1,0	$0{,}1424\cdot10^{-6}$	$0{,}377\cdot10^{-3}$	0,9996

Из данных табл. 36 видно, что можно принять $\lambda = 1{,}0$ для $\tau > 10$, когда $n \leqslant 0{,}01$, и для $\tau > 10^4$, когда $n \leqslant 20$.

Коэффициент n для газовых скважин обычно выражается следующими значениями:

$$n = \frac{\beta^* Q}{R_c} \approx \frac{bQ^2}{aQ} \ln \frac{R_к^2}{R_c^2} \leqslant (10 \div 15),$$

где a и b — коэффициенты в двучленной формуле стационарной фильтрации [92]. Поэтому можно считать в большинстве случаев на практике, что для $\tau \geqslant 10^2 \div 10^3$ $\lambda \approx 1{,}0$. Тогда из формул (32.4) и (32.5) получим

$$p_{пл}^2 - p_c^2 = \frac{Q\mu p_{ат} T_{пл} z}{2\pi k h T_{ст}} \ln \frac{2{,}94\varkappa t}{R_c^2} + \frac{Q^2 \rho_{ат} p_{ат} T_{пл}^2 z}{\pi^2 h^2 l' T_c^2 R_c}. \qquad (32.9)$$

Нетрудно убедиться, что в формуле (32.9) второе слагаемое в правой части есть не что иное, как второй член в двучленной формуле стационарного притока газа к скважине, равный bQ^2.

В работе [86] для учета двучленного закона сопротивления при нестационарной фильтрации газа был предложен метод введения фиктивной укрупненной совершенной скважины, приток к которой описывается формулами нестационарной фильтрации при существовании закона Дарси. Внутри же такой скважины в каждый момент времени наблюдается стационарное распределение давления. При этом была получена формула, в точности совпадающая с формулой (32.9).

Итак, для учета различного рода дополнительных сопротивлений при нестационарной фильтрации газа можно принять обычные формулы нестационарного притока газа к идеальным скважинам, получаемые при использовании закона Дарси, а дополнительные сопротивления учесть путем добавления постоянных, не меняющихся во времени сопротивлений. Последние определяются обычными формулами стационарной фильтрации. Это означает, что в формулах нестационарной фильтрации вместо радиуса скважины ставят приведенный радиус скважины

$$R_{c.\,пр} = R_c e^{-C}, \qquad (32.10)$$

где C — коэффициент, характеризующий несовершенство скважины по степени и характеру вскрытия, а также состояние призабойной зоны (скин-эффект): $C = C_1 + S'$, см. (32.2) и (32.3).

4. Влияние границ пласта на изменение давления в скважинах

Исследованию этого эффекта посвящено большое число работ — см., например, [15, 88, 209]. На кривые нарастания давления в газовых и нефтяных скважинах экраны влияют таким образом, что на графике зависимости p от $\ln t$ получаются два прямолинейных участка, по точке пересечения которых можно определять [88] расстояние до экрана

$$l_0 = \sqrt{0{,}56\varkappa t_0}, \qquad (32.11)$$

где l_0 — расстояние до экрана; t_0 — координата точки пересечения двух прямолинейных участков.

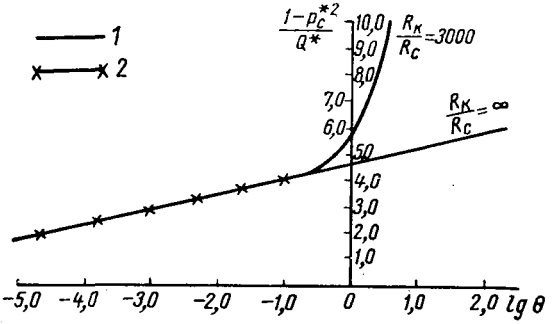


Рис. 50. Зависимость $p_c(t)$ в координатах $(1-p_c^{*2})/Q$:

1 — точное решение; *2* — приближенное решение.

Выше отмечалось влияние непроницаемого кругового контура на нестационарное распределение давления по пласту при пуске скважины (см. § 24). Это влияние сказывается и на кривой стабилизации давления в скважине, причем учет этого эффекта важен для обработки результатов опытной эксплуатации.

Проанализируем в связи с этим решение задачи о работе скважины в цилиндрическом пласте с $Q = \text{const}$, полученное на ЭВМ [125]. Представим полученную зависимость $p_c(t)$ в координатах $(1 - p_c^{*2})/Q^*$ от $\lg \theta$, где $p_c^* = p_c/p_0$; p_0 — начальное давление.

$$Q^* = \frac{2\mu p_{ат}}{\pi k h p_0^2} Q; \quad \theta = \frac{k p_0}{2m\mu R_к^2} t.$$

Эта зависимость представлена графически на рис. 50, из которого видно, что до $\theta < 0{,}2$ рассматриваемая зависимость хорошо аппроксимируется прямой. При $\theta > 0{,}2$ график становится криволиней-

ным. Если же зависимость обработать в координатах $(1-p_c^{*2})/Q^*$ от θ, то при $\theta > 0{,}2$ получается зависимость, близкая к прямолинейной (рис. 51, кривая *I*). При обработке же в координатах $(1-p_c^{*2})/Q^* + Q^*\theta^2$ от θ при $\theta > 0{,}2$ получается прямая *II* с угловым коэффициентом, равным 2. Интересно отметить, что решение этой же задачи приближенным методом «осреднения» приводит к формуле

$$\frac{1-p_c^{*2}}{Q^*} = 4{,}06 + 2\theta - Q^*\theta^2. \qquad (32.12)$$

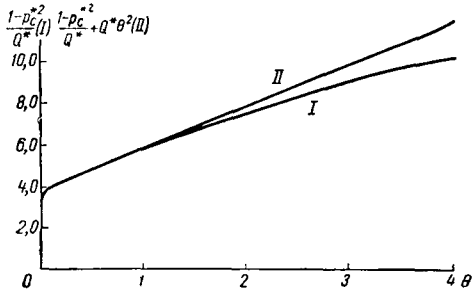


Рис. 51. Зависимость $1 - p_c^{*2}/Q^*$ от θ.

На основании отмеченных выше особенностей в работе [87] предлагается метод определения объема порового пространства при обработке кривых стабилизации по формуле (32.12).

5. Восстановление давления в скважинах, вскрывающих трещиновато-пористый пласт

Единственным способом определения проницаемости и пористости трещин, а также времени запаздывания τ является расшифровка данных по исследованию скважин и прежде всего данных о восстановлении давления в скважинах, причем априори неизвестен даже порядок величин τ, ε_1, ε_2 (см. § 22, 26).

Рассмотрим соответствующую математическую задачу — скважина малого, но не нулевого радиуса r_c работала с постоянным дебитом Q в течение достаточно длительного интервала времени, так что вокруг скважины установилось стационарное распределение давления $p_0(r)$. С момента времени $t = 0$ скважина закрывается: $Q = 0$, $t \geqslant 0$. Будем искать распределение давлений p_1, p_2 при $t \geqslant 0$ в виде

$$\left.\begin{aligned} p_1(r, t) &= p_0(r) + \frac{Q\mu}{2\pi kh} u_1(r, t) \\ p_2(r, t) &= p_0(r) + \frac{Q\mu}{2\pi kh} u_2(r, t) \end{aligned}\right\}, \qquad (32.13)$$

причем будем требовать выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} &p_1 = p_2 = p_0(r), \quad t = 0; \\ &p_1 = p_2, \quad r = r_c, \quad t \geqslant 0; \\ &\left(\varepsilon_1 r \frac{\partial p_1}{\partial r} + r \frac{\partial p_2}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_c} = 0 \end{aligned} \qquad (32.14)$$

и ограниченности на бесконечности. Эти условия для функций u_1, u_2, также ограниченных при $r \to \infty$, принимают вид

$$u_1 = u_2 = 0, \quad t = 0;$$
$$u_1 = u_2, \quad r = r_c; \tag{32.15}$$
$$\varepsilon_1 \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)_{r=r_c} + \left(r \frac{\partial u_2}{\partial r} \right)_{r=r_c} = -1.$$

Кроме того, как и в системе задачи о восстановлении давления в обычной пористой среде, дополнительно известно изменение давления на стенке скважины $p_c(t) = p_1(t) = p_2(t)$, т. е.

$$u_1(r_c, t) = u_2(r_c, t) = \frac{2\pi kh}{Q\mu} [p_c(t) - p_c(t=0)]. \tag{32.16}$$

Это дополнительное условие позволяет найти эффективную формулу, выражающую искомые параметры пласта через измеряемую в процессе наблюдения за скважиной функцию $p_c(t)$.

Прежде всего заметим, что задача о восстановлении давления в скважине фактически сводится — см. условия (32.15) — к задаче о мгновенном пуске с постоянным дебитом скважины радиуса r_c (малого, но не нулевого, поскольку здесь исходными являются результаты замеров, производимых именно при $r = r_c$). Поэтому в общем случае согласно результатам § 26 трансформанта u на стенках скважины ($\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}(r_c)$, т. е. давления в блоках и в трещинах здесь равны между собой) будет определяться следующим выражением:

$$\bar{u}_c = \bar{u}(R=1, s^*) = \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right)}{s\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\, K_1\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right)(1+\beta)}, \tag{32.17}$$

где

$$\beta = \varepsilon_1 \frac{s_*^2}{(s_* + \lambda)^2} \sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}} \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right) K_1\left(\sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}}\right)}{\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\, K_1\left(\sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_* + \lambda)}{s_* + \lambda}}\right) K_0\left(\sqrt{\frac{s_* + \lambda}{\varepsilon_1}}\right)}. \tag{32.18}$$

По известной из промысловых наблюдений кривой $p_c(t)$ можно методами численного интегрирования определить [7] интеграл в выражении для изображения $\bar{u}_c$ в точке $r = r_c$:

$$\bar{u}_c = \frac{2\pi kh}{Q\mu} \int_0^\infty (p_c(t) - p_c(t=0))\, e^{-st}\, dt = \frac{2\pi kh}{Q_0\mu} \bar{p}_c. \tag{32.19}$$

Таким образом, в общем случае неизвестные параметры в выражении (32.17) следующие:

$$\frac{2\pi kh}{Q_0\mu}, \quad \lambda = \frac{r_c^2}{\varkappa\tau}, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad s_* = \frac{r_c^2}{\varkappa} s,$$

причем последний из них фактически определяет только величину $r_c^2/\varkappa$, так как значениями s_* задаются при вычислении интеграла (32.19). Как уже было показано выше, хотя параметры ε_1, ε_2 гораздо меньше единицы, они существенно влияют на ход кривой изменения забойного давления. [1]

Остановимся сначала на наиболее интересном варианте $\lambda \ll 1$, $s_* \ll 1$. При этом выражение (32.18) упростится и примет вид

$$\beta = \varepsilon_1 \frac{s_*^2}{(s_*+\lambda)^2} \sqrt{\frac{s_*+\lambda}{\varepsilon_1}} \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{s_*+\lambda}{\varepsilon_1}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{s_*+\lambda}{\varepsilon_1}}\right)} \ln \frac{2}{\gamma \sqrt{\frac{s_*(\varepsilon_2 s_*+\lambda)}{s_*+\lambda}}}. \quad (32.20)$$

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon_1 \gg \lambda$ — радиус скважины гораздо меньше ширины зоны скачка давления p_1 в блоках. Тогда при $s_* \sim \lambda$ (или $s \sim 1/\tau$, т. е. при временах процесса, сопоставимых со временем запаздывания) справедлива следующая оценка: $\beta \approx \varepsilon_1 |\ln \varepsilon_1|$.

При $s_* \gg \lambda$, например при $s_* \sim \varepsilon_1$, имеем $\beta \sim \varepsilon_1 \ln 2/(\gamma\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2})$ — эта оценка справедлива для времен на порядок и более меньше времени запаздывания. Наконец, при гораздо больших временах, нежели τ, т. е. при $s_* \ll \lambda \ll \varepsilon_1$, получаем

$$\beta \sim \varepsilon_1 \left(\frac{s_*}{\lambda}\right)^2 \left(\ln \frac{2}{\gamma\sqrt{s_*}}\right) \left| \ln \left(\frac{2}{\gamma \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_1}}} \right) \right|.$$

Далее, в случае $\varepsilon_1 \sim \lambda$ — радиус скважины и ширина скачка давления p_1 сопоставимы — имеем следующие оценки. При $s_* \sim \lambda$ (т. е. при $s \sim 1/\tau$) имеем $\beta \sim \varepsilon_1 |\ln \sqrt{\varepsilon_1 s_*}|$, при $s_* \gg \lambda \sim \varepsilon_1$ (т. е. при $s \gg 1/\tau$) имеем $\beta \sim \varepsilon_1 \left| \ln \frac{2}{\gamma\sqrt{\varepsilon_2 s_*}} \right| \ln \sqrt{\frac{s_*}{\varepsilon_1}}$, а при бо́льших временах $s_* \ll \lambda \sim \varepsilon_1$ справедлива оценка $\beta \sim \varepsilon_1 \left(\frac{s_*}{\lambda}\right)^2 \ln \frac{2}{\gamma\sqrt{s_*}}$.

Наконец, при $\varepsilon_1 \ll \lambda$ имеем при $s_* \sim \lambda$ оценку $\beta \sim \sqrt{\varepsilon_1\lambda} |\ln \sqrt{\lambda}|$; при $s_* \sim \lambda$ ($\gg \varepsilon_1$) $\beta \sim \sqrt{\varepsilon_1 s_*} |\ln \sqrt{s_*\varepsilon_2}|$ при $s_* \sim \varepsilon_1 \ll \lambda$ получаем $\beta \sim \varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon_1}{\lambda}\right)^{5/12} \ln \sqrt{s_*}$.

Таким образом, при $s \ll 1$ и $\lambda \ll 1$ учет или пренебрежение величиной ε_1 хотя и скажется в некоторых интервалах времени на ходе теоретической кривой восстановления, но это будет только некоторой поправкой, не меняющей основного хода кривой.

---

[1] В реальных пластах трещины могут быть связаны с кавернами, так что величина параметра ε_2 может возрасти. Различие эффективной проницаемости первичных и вторичных пор (в связи с редкой сеткой последних) также может не быть столь резким (нарушится условие $\varepsilon_1 \ll 1$). Тогда влияние величин ε_1, ε_2 будет оказываться на гораздо большем диапазоне времени установления притока. Исследование таких случаев представляет самостоятельный интерес.

Однако в начальные моменты времени для $0{,}01 < s \leqslant 1$ сам ход кривой будет определяться параметром ε_1. Например, при $\lambda \ll \varepsilon_1$ оценка $\beta \approx \sqrt{\varepsilon}\ \ln \sqrt{\max(\varepsilon_2, \lambda)}$ и при $\varepsilon \sim 10^{-2}$ имеем $\beta > 0{,}1$. Аналогичным образом, как показано в работе [1], влияет параметр ε_2 — см. также [27].

Отсюда начальный (обычно понимаемый как дефектный) участок кривой восстановления давления, характеризуемый условием $t \ll \tau$, определяется в значительной степени эффектом ненулевой проницаемости блоков и ненулевой упругоемкости системы трещин. Асимптотика кривых восстановления давления ($t \gg \tau$) соответствует параметрам обычного упругого пласта с сжимаемостью блоков и проницаемостью трещин. В то же время участки $t \sim \tau$ соответствуют уравнениям (22.5).

Решение задачи о восстановлении давления было предложено А. Баном [6, 8], оно было выписано в изображениях и получается из (32.17) при $\beta = 0$, $\varepsilon_2 = 0$:

$$\bar{u}(R=1, s_*) = \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{s_*\lambda}{s_*+\lambda}}\right)}{s_*\sqrt{\frac{s_*\lambda}{s_*+\lambda}}\,K_1\left(\sqrt{\frac{s_*\lambda}{s+\lambda}}\right)}. \qquad (32.21)$$

Считая, что $s_*\lambda \ll (s_* + \lambda)$ и применяя асимптотические формулы для функции Макдональда $K_0(z)$, $K_1(z)$, можно перейти от соотношения (32.21) к следующей формуле для расшифровки кривых восстановления давления:

$$\frac{1}{t_0}\int_0^\infty [p_c(t) - p_c(0)]\, e^{-t/t_0} = \frac{Q\mu_0}{4\pi k_1 h}\left[-\ln\frac{r_c^2\gamma}{4\varkappa} + \ln(t_0+\tau)\right]. \qquad (32.22)$$

Характерное время запаздывания τ и приведенный радиус скважины можно определить согласно способу, предложенному А. Баном [6], — путем независимой оценки множителя перед квадратными скобками в правой части формулы (32.22) по индикаторной линии.

При больших депрессиях в таких пластах существен эффект изменения проницаемости с давлением: индикаторные линии изогнуты — и в этом случае необходимо прибегнуть к линеаризованным уравнениям (26.4). Тогда решение задачи о восстановлении давления дает следующую формулу для расшифровки кривой восстановления давления:

$$\frac{1}{t_0}\int_0^\infty \left(e^{\alpha_1[p_c(t)-p_c(0)]} - 1\right) e^{-t/t_0}\, dt = \frac{G_0\mu_c\alpha_1}{4\pi k_{1c}\rho_c h}\left[\ln\frac{4\varkappa}{r_c^2\gamma} + \ln(t_0+\tau)\right]. \qquad (32.23)$$

Здесь μ_c, ρ_c, k_{1c} — вязкость, плотность нефти и проницаемость системы трещин при забойном давлении в момент начала восстановления давления; α_1 — коэффициент, учитывающий изменения

фильтрационного сопротивления системы трещин; величина, определяемая по изгибу индикаторных линий [49].

При больших скоростях фильтрации изгиб индикаторных линий может свидетельствовать также об отклонениях от линейного закона Дарси из-за проявления инерционных сил сопротивления потоку. В этом случае (также вполне реальном для скважин, вскрывающих трещиноватый пласт) закон фильтрации можно представить в виде

$$-\operatorname{grad} p = (\mu/k_1)\vec{w} + \beta\rho\,|\vec{w}|\,\vec{w}_1.$$

Приближенное решение, построенное Э. А. Авакян [1] с использованием приема линеаризации (заменой сомножителя $|\vec{w}|$ его начальным распределением), приводит к следующей формуле:

$$\frac{1}{t_0}\int_0^{\infty}[p_c(t)-p_c(0)]\,e^{-t/t_0}\,dt = \frac{Q_0\mu}{4\pi k_1 h}\left[-\ln\frac{r_{c\gamma}^2}{4\varkappa} + \ln(t_0+\tau) + \frac{\omega}{r_c}\right], \tag{32.24}$$

где $\omega = \beta\rho k_1 Q_0/(\pi h\mu)$; формула (32.24) применима при $\omega/\sqrt{\varkappa(t_0+\tau)} \ll 1$.

Согласно формуле (32.24) кривая восстановления давления (при указанной обработке) смещена (по отношению к кривой, соответствующей закону Дарси) вверх на величину $Q\mu_0\omega\,(4\pi k_1 h r_c)^{-1}$. Поэтому методика определения времени запаздывания τ сохраняется неизменной, а учет (или неучет) нелинейного закона сопротивления отражается на величине приведенного радиуса скважины.

6. Немгновенное прекращение притока при восстановлении давления

Для учета немгновенного прекращения притока в скважину необходимо, как это нетрудно показать, заменить, например, значения $\bar{u}_c$ в формуле (32.19) на следующую величину:

$$\bar{u}_c = \frac{2\pi kh}{\mu}\,\frac{\int_0^{\infty}[p_c(t)-p_c(t=0)]\,e^{-st}\,dt}{\frac{Q_0}{s}-\int_0^{\infty}Q(t)\,e^{-st}\,dt}, \tag{32.25}$$

где $Q(t)$ — расход на скважине при $t \geqslant 0$, быстроубывающая функция времени. Функция $Q(t)$ определяется условием сжатия газа, оказавшегося в стволе скважины после ее внезапного закрытия.

Следует сделать, однако, следующее замечание. Обычно влияние продолжающегося притока завершается примерно в то же время,

[1] Э. А. Авакян. Некоторые вопросы нестационарной фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. М., ВНИИнефтегаз, 1968.

что и влияние таких осложняющих факторов, как скин-эффект, несовершенство скважины и т. д. Поэтому применение методов, учитывающих только продолжающийся приток, не исправляет начального участка. Это наглядно видно, если использовать так называемые «дифференциальные» методы. Обработка же таких кривых нарастания по «интегральным» методам очень часто дает верный результат, ибо при этом искажение начального участка явно не проявляется.

7. Особенности исследования скважин с низкой продуктивностью

В скважинах, вскрывающих пласты с плохими коллекторскими свойствами, процессы изменения давления происходят крайне медленно и при обработке данных исследования скважин требуется учитывать характер работы скважины до ее остановки (пуска).

Пусть в бесконечном однородном пласте работает совершенная скважина радиуса R_0. Остановки скважины и последующие ее пуски будем имитировать наложением в этой же точке результатов работы и стоков и источников [243]. При этом подразумевается, что скважину закрывают непосредственно на забое радиуса R_0.

Тогда согласно методу суперпозиции решений линеаризованного уравнения (25.1) будем иметь (для идеального газа):

для первого режима — пуск скважины

$$p_{\text{пл}}^2 - p_{\text{с}}^2 = \beta Q_1 \ln \alpha t, \tag{32.26}$$

для второго режима — остановка скважины

$$p_{\text{пл}}^2 - p_{\text{с}}^2 = \beta Q_1 \ln \frac{t_1 + t}{t}. \tag{32.26'}$$

Формула, описывающая стабилизацию давления при переходе скважины на n-й режим, будет иметь вид [90]

$$p_{\text{пл}}^2 - p_{\text{с}}^2 = \beta Q_n \ln \alpha t + \beta \sum_{i=1}^{i=n-1} Q_i \ln \frac{(\tau_{n-1} - \tau_{i-1}) + t}{(\tau_{n-1} - \tau_i) + t}. \tag{32.27}$$

Формула для кривых нарастания давления записывается в виде [105]

$$p_{\text{пл}}^2 - p_{\text{с}}^2 = \beta \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \ln \frac{(\tau_{n-1} - \tau_{i-1}) + t}{(\tau_{n-1} - \tau_i) + t}. \tag{32.28}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\beta = \frac{\mu z T_{\text{пл}} p_{\text{ат}}}{2\pi k h T_{\text{ст}}}; \quad \alpha = \frac{2{,}25\varkappa}{R_0^2};$$

$p_{\text{с}}$ — давление на забое совершенной скважины; $\tau_n = \sum_{m=1}^{m=n} t_m$ —

суммарное время работы скважины на n-ых режимах; t_m — время работы скважины на m-ом режиме; $m = 1, 2, \ldots, n$.

При переходе к реальным несовершенным скважинам под p_c будем понимать давление на радиусе укрупненной скважины R_0; p_c — забойное давление на радиусе скважины R_c. Тогда формула (32.27) перепишется так:

$$p_{пл}^2 - p_c^2 = \beta Q_n \ln \alpha t + bQ_n^2 + C, \quad C = \beta \sum_{i=1}^{i=n-1} Q_i \ln \frac{(\tau_{n-1} - \tau_{i-1}) + t}{(\tau_{n-1} - \tau_i) + t}, \quad (32.29)$$

где b — коэффициент фильтрационного сопротивления в двучленной формуле притока газа к скважине;

$$\alpha = \frac{2{,}25\varkappa}{(R_{c.\,пр}^2)}; \quad R_{c.\,пр} = R_c e^{-\xi};$$

ξ — коэффициент, характеризующий несовершенство вскрытия пласта.

Пример расчета. Рассмотрим работу скважины в процессе исследования, когда время продувки на каждом режиме составляет 3600 *сек*, а время восстановления между сменой режимов — 600 *сек*. Принята следующая характеристика пласта: $p_{пл} = 250$ *ат*;

$$\beta = \frac{2{,}3\mu}{2\pi kh} = \frac{2{,}3 \cdot 0{,}02}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01 \cdot 5000} = 1{,}465 \cdot 10^{-4};$$

$$\alpha = \frac{2{,}25\varkappa}{R_c^2} = \frac{2{,}25kp_{пл}}{R_c^2 m\mu} = \frac{2{,}25 \cdot 0{,}01 \cdot 250}{36 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02} = 78{,}0.$$

Фильтрация газа происходит в условиях выполнения закона Дарси. Заданное распределение дебитов газа по режимам приведено в табл. 37.

Таблица 37

	№ режима							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Дебит газа:								
тыс. *м³/сутки*	50	0	200	0	300	0	450	0
см³/сек	$0{,}58 \cdot 10^6$	0	$2{,}32 \cdot 10^6$	0	$3{,}48 \cdot 10^6$	0	$5{,}2 \cdot 10^6$	0

Результаты расчетов по формуле (32.29) приведены в табл. 38 и на рис. 52.

Таблица 38

№ режима	$Q \cdot 10^6$, *см³/сек*	$p_{пл}^2 - p_c^2$	C_n	$[\Delta p^2/Q] \cdot 10^{-4}$	$\Delta p^2 - C_n$	$\left[\frac{\Delta p^2 - C_n}{Q}\right] \cdot 10^{-4}$
1	0,58	463	0	7,98	463	7,98
2	2,32	1873	23	8,07	1850	7,98
3	3,48	2884	104	8,29	2780	7,98
4	5,2	4348	198	8,36	4150	7,98

Как видно из графиков (рис. 52), за счет нестабилизации индикаторная кривая *II* значительно отклоняется от прямой *I*, а при ее обработке получается заниженный коэффициент $a = 7{,}85 \cdot 10^{-4}$ (вместо $7{,}98 \cdot 10^{-4}$) и появляется

фиктивный коэффициент $b=0{,}106\cdot10^{-9}$ (по условиям задачи $b=0$). Таким образом, из данного теоретического примера следует, что нестабилизация при частом чередовании режимов работы скважины приводит к искажению индикаторных кривых, а стандартная их обработка — к неправильным результатам.

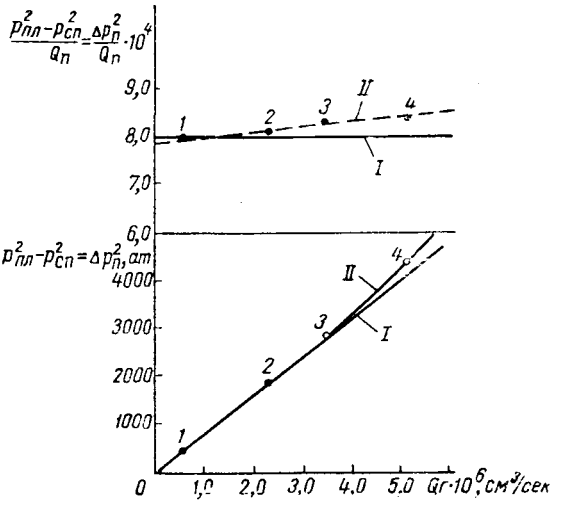


Рис. 52. Форма индикаторной линии при нестабилизации давления.

На практике для обработки кривых стабилизации давления в плохих коллекторах применяют *изохронный метод испытания*, который предусматривает постоянное для всех режимов время работы скважины и закрытие скважины до восстановления статического давления, причем довольно широко распространена следующая приближенная методика учета различных значений коэффициента C_n на разных режимах. Считается, что в качестве пластового давления для данного режима следует принимать значение давления в закрытой скважине перед работой на данном режиме, т. е. $C_n = \varphi_{n-1}$, где

$$\varphi_n=\sum_{C=1}^{n=1} Q_l \ln\frac{\tau_n-\tau_{l-1}}{\tau_n-\tau_l}.$$

В действительности $C_n < \varphi_{n-1}$. Для наглядности выпишем значение C_n для пятого режима (третий пуск скважин) из формулы (32.16)

$$C_n'=\beta\left(Q_1\ln\frac{5}{4}+Q_3\ln\frac{3}{2}\right).$$

Значение φ для четвертого режима (вторая остановка скважины), т. е. для остановки перед данным пуском скважины, будет составлять

$$\varphi_{n-1}'=\beta\left(Q_1\ln\frac{4}{3}+Q_3\ln 2\right)$$

и разница составит

$$\varphi'_{n-1} - C'_n = \beta Q_3 \left(\frac{Q_1}{Q_3} \ln \frac{16}{15} + \ln \frac{4}{3} \right).$$

Таким образом, предположение $C_n = \varphi_{n-1}$ не всегда оправдано и может привести к серьезным ошибкам.

Для правильной интерпретации подобных индикаторных линий можно применять два способа:

1) по кривым нарастания или другим нестационарным методам определяют коэффициент β. Зная коэффициент β, рассчитывают значения C_n или C'_n для каждого режима. Далее производят обработку по обычной методике с учетом третьего члена;

2) выбирают наиболее тщательно снятую точку и считают ее за точку отсчета $n = 0$. Для этой точки определяют функции

$$Y_0 = \frac{p^2_{пл} - p^2_{сп}(t_0)}{Q_0},$$

$$X_0 = \left[\ln t_0 + \frac{1}{Q_0} \sum_{i=1}^{i=n} Q_i \ln \frac{\tau_n - \tau_{i-1}}{\tau_n - \tau_i} \right].$$

Тогда согласно формуле (32.29)

$$Y_0 - Y = b(Q_0 - Q) + \beta (X_0 - X). \qquad (32.30)$$

Представляя результаты испытания по формуле (32.30) в виде

$$\frac{Y_0 - Y}{Q_0 - Q} = b + \beta \frac{X_0 - X}{Q_0 - Q}, \qquad (32.31)$$

удобно определить коэффициент β, а в виде

$$\frac{Y_0 - Y}{X_0 - X} = \beta + b \frac{Q_0 - Q}{X_0 - X} \qquad (32.32)$$

удобно определить коэффициент b.

Пример обработки результатов испытания скважины

В скважине перфорирован интервал 1763—1756 *м*, т. е. 7 *м*, эффективная мощность пласта 9 *м*. После продувки скважины в течение 34 *ч* с дебитом $Q =$ $=290$ тыс. *м*³/*сутки* скважина была закрыта на 5 *ч*. Давление за этот период восстановилось до 210 *ат*, после чего скважину испытали на девяти режимах. Весь ход испытания показан в табл. 39. В конце испытания скважина стояла в течение суток, давление не установилось и продолжало расти. Таким образом, определить пластовое давление не удалось.

По указанной выше методике была обработана кривая нарастания давления после работы скважины на шайбе диаметром 7,93 *мм* с дебитом $Q = 147{,}5$ тыс. *м*³/*сутки*.

Формула (32.25) для этого случая будет иметь вид

$$p^2_{пл} - p^2_{с} = \beta Q \left[1{,}9 \ln \frac{4236+t}{2194+t} + 0{,}19 \ln \frac{1893+t}{1636+t} + 0{,}56 \ln \left(\frac{1604+t}{1494+t} \right) + \right.$$
$$+ 1{,}3 \ln \frac{1508+t}{1374+t} + 1{,}59 \ln \frac{617+t}{530+t} + 1{,}8 \ln \frac{468+t}{378+t} +$$
$$\left. + 2{,}06 \ln \frac{360+t}{274+t} + 2{,}02 \ln \frac{173+t}{89+t} + \ln \frac{66+t}{t} \right] = 2{,}3 \beta Q \varphi'.$$

Таблица 39

№ режима	$Q_з$, тыс. $м^3/сутки$	p_c, $ат$	p_c^2	Δp^2	Время работы, $мин$	QX	Y	Y_0-Y	Q_0-Q	X	X_0-X	$\frac{Y_0-Y}{X_0-X}$	$\frac{Q_0-Q}{X_0-X}$	$\frac{Y_0-Y}{Q_0-Q}$	$\frac{X_0-X}{Q_0-Q}$
1	290	—	—	—	2040	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0	210,0	44 100	—	300	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	29	209,8	44 016	17 388	260	263	600	0	0	9,07	0	—	—	—	—
4	0	218,0	47 520	—	30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	84,1	200,7	40 280	21 124	102	360,7	251	349	55,1	4,29	4,78	73,0	11,5	6,34	0,087
6	0	215,0	46 220	—	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	192	167,6	28 088	33 316	133	590,2	173,5	426,5	163	3,07	6,00	71,2	27,2	2,62	0,0368
8	0	230,0	52 900	—	740	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	238	157,9	24 929	36 475	84	631,0	153,3	446,7	209	2,65	6,42	69,7	32,6	2,14	0,0307
10	0	224,0	50 180	—	66	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	266	144,2	20 796	40 608	86	684,0	152,5	447,5	237	2,57	6,50	68,85	36,5	1,885	0,0274
12	0	211,9	44 900	—	23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	288	117,2	13 736	47 668	81	780,0	165,5	434,5	259	2,71	6,36	68,2	40,7	1,675	0,0245
14	0	205,0	42 020	—	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	304	103,2	10 652	50 852	79	818,6	167,0	433	275	2,69	6,38	67,9	43,1	1,575	0,0233
16	0	194,3	37 754	—	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	298	192,5	8 556	52 848	77	837,6	180,5	419,5	264	2,86	6,21	67,6	42,5	1,585	0,0235
18	0	204,1	41 660	—	24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	147,5	179,4	32 184	29 220	65	491,0	198,3	401,7	118,5	3,33	5,74	70,2	20,7	3,39	0,0483
20	0	235,1	55 263	—	1457	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Результаты обработки представлены на рис. 53 и в табл. 40. На рис. 53 для сопоставления приведены также кривые нарастания после шайб (d = 3,23; 9,49 *мм*). Из графика четко видно, что замеренное пластовое давление после остановки скважины на сутки ниже истинного: $p_{пл}$ = 247,6 *ат*; $p^2_{пл}$ = 61 300.

Таблица 40

t, *мин*	p_c	p_c^2	φ^1
1	184,4	34 000	3,66
3	192,8	37 170	3,19
5	198,4	39 360	2,96
7,5	203,4	41 370	2,79
11,5	207,0	42 850	2,60
13	207,5	43 050	2,55
15	208,9	43 630	2,59
25	210,8	44 430	2,27
35	211,7	44 810	2,12
45	212,0	44 980	2,01
55	216,6	45 180	1,94
105	216,4	46 820	1,70
165	217,3	47 210	1,46
225	219,1	48 000	1,37
285	222,7	49 600	1,27
345	224,3	50 300	1,19
405	226,8	51 440	1,12
465	226,8	51 440	1,07
525	226,8	51 440	0,998
585	227,7	51 870	0,96
645	228,5	52 210	0,92
705	228,5	52 210	0,89
765	229,1	52 485	0,87
849	239,75	52 790	0,83
914	230,5	53 130	0,80
970	231,1	53 410	0,787
1015	231,6	53 630	0,765
1099	232,1	53 865	0,754
1146	232,5	54 050	0,732
1250	233,4	54 480	0,704
1345	233,7	54 620	0,688
1400	233,9	54 720	0,661
1457	235,08	55 263	0,648

По кривой нарастания определен (по второму прямолинейному участку) коэффициент $\beta' = 2{,}3\,\beta Q = 3800$, или $2{,}3\,\beta = 25{,}8$, из которого определен коэффициент

$$kh = 42{,}4\,\frac{QT_{пл}\mu}{\beta' T_{ст}} = \frac{42{,}4 \cdot 147{,}5 \cdot 1{,}22 \cdot 0{,}0194}{3800} = 0{,}0389\ дм.$$

Наличие на кривой нарастания двух прямолинейных участков говорит о том, что недалеко от скважины находится зона с резко ухудшенными коллекторскими свойствами. Действительно, по геологическим данным, недалеко от скважины испытываемый горизонт выклинивается.

Кроме того, результаты кратковременных остановок (см. табл. 39) были обработаны по формуле (23.19). Результаты обработки приведены в табл. 41 и на рис. 54.

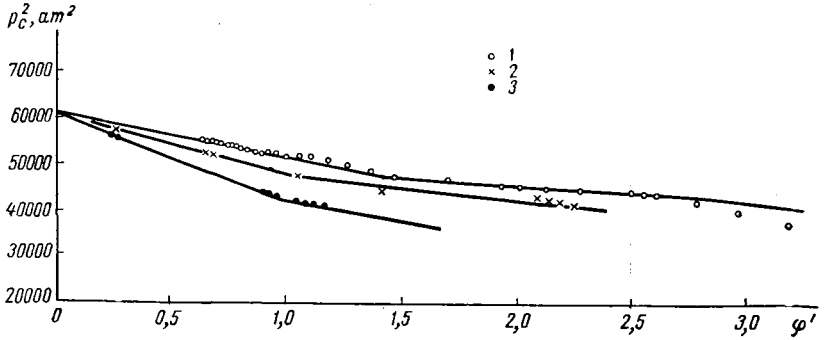


Рис. 53. Результаты обработки кривой нарастания давления после шайбы диаметром:

1 — d = 7,93 *мм*; *2* — d = 9,49 *мм*; *3* — d = 3,23 *мм*.

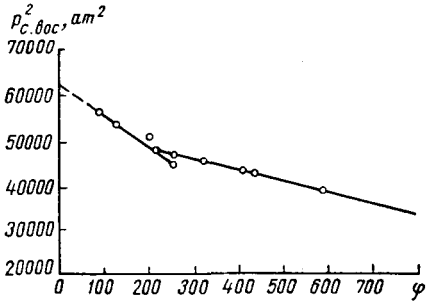


Рис. 54. Результаты исследования при кратковременных остановках.

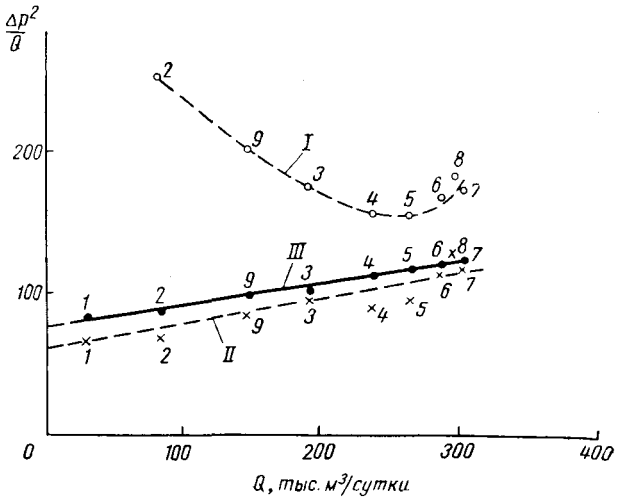


Рис. 55. Результаты обработки индикаторной линии в координатах $\Delta p^2/Q$ от Q.

Таблица 41

№ режима	Q, тыс. $м^3/сутки$	$p^2_{с.\ вос}$, $ат^2$	φ
1	290,0	44 100	259,0
2	29,0	47 520	217,1
3	34,1	46 220	254,7
4	192,0	52 900	124,8
5	238,0	50 180	200,0
6	266,0	44 900	330,1
7	288,0	42 020	420,1
8	304,0	37 754	596,0
9	298,0	41 660	438,6
10	147,5	55 263	85,0

По результатам обработки определены $p^2_{пл} = 61\ 500$, т. е. $p_{пл} = 248\ ат$; угловой коэффициент второго участка $2{,}3\ \beta = 26$; угловой коэффициент первого участка (характеризующего наличие экрана) $2{,}3\ \beta_1 = 68{,}5$.

Как видно, результаты хорошо согласуются с результатами обработки кривых нарастания давления. Полученное при обработке пластовое давление $p_{пл} = 248\ ат$ хорошо согласуется с измеренными величинами $p_{пл}$ по соседним скважинам.

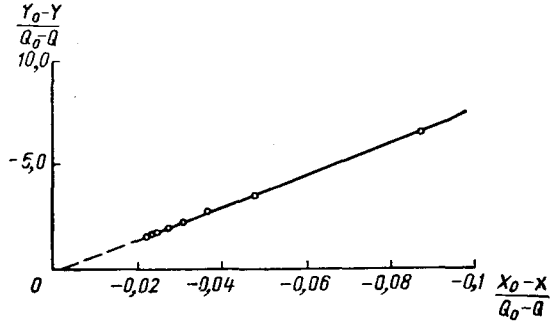


Рис. 56. Результаты обработки индикаторной кривой по формуле (32.31).

Все данные, характеризующие индикаторную линию, приведены в табл. 39 (для расчета здесь принято $p_{пл} = 247{,}6\ ат$). Обработка индикаторной кривой по стандартной методике показана на рис. 55 (кривая *I*). Как видно из рис. 55, индикаторная кривая имеет аномальный вид, который нельзя интерпретировать с помощью обычной методики. Если формально применить трехчленную формулу с $C = 15\ 500$, то обработка кривой (табл. 42) с учетом этого значения C дает следующий результат (см. рис. 55, кривая *II*): $a = 60{,}0$; $b = 0{,}175$ и не избавляет от сильного разброса точек.

Результаты обработки по формулам (32.31), (32.32) приведены в табл. 39 и на рис. 56. По результатам обработки определены коэффициенты $\beta = 74$ и $b = 0{,}14$.

По найденным значениям коэффициентов β и b рассчитаем индикаторную кривую и определим коэффициент a для условий работы на каждом режиме $t^* = 2$ ч ($\lg t^* = 2{,}06$). Результаты расчета приведены в табл. 42 и на рис. 55 кривая *III*).

Таблица 42

Q, тыс. $м^3/сутки$	X	$X-\lg t^*= X-2{,}06$	$C_n/Q= \beta(X-2{,}06)$	Y	$\frac{\Delta p^2-C_n}{Q}$	Δp^2-C_n	$\frac{\Delta p^2-15\,500}{Q}$
29	9,07	7,01	519,0	600,0	81,0	2 350	65,2
84	4,29	2,23	165,0	251,0	86,0	7 240	66,9
192	3,07	1,01	74,4	173,5	99,1	19 000	92,8
238	2,65	0,585	43,3	153,3	110,7	26 200	88,2
266	2,57	0,506	37,5	152,5	115,0	30 800	94,5
288	2,706	0,642	47,5	165,5	118,0	34 000	111,5
304	2,69	0,626	46,4	167,0	120,6	36 600	116,0
298	2,86	0,796	59,0	180,5	121,5	35 600	127,5
147	3,33	1,37	104,3	198,3	97,0	14 300	92,9

По результатам обработки определен коэффициент $a = 76$. Таким образом, в результате обработки установлено, что если бы скважину испытывали изохронным методом при работе на каждом режиме в течение 2 *ч*, то при этом получили бы следующие значения коэффициентов: $a = 76$ и $b = 0{,}14$.

8. Нелокально-упругие эффекты

Для изучения влияния нелокально-упругих эффектов на кривые восстановления давления необходимо решать уравнение (24.13) при следующих граничных условиях [1]:

$$u(r, 0) = 0, \quad (r\,\partial u/\partial r)_{r=0} = -1, \tag{32.33}$$

$$p = p_0(r) + \frac{Q\mu}{2\pi kh}\,u(r, t),$$

причем на начальное распределение $p_0(r)$ налагается условие:

$$r\,\partial p_0/\partial r = Q\mu\,(2\pi kh)^{-1} \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

Решение задачи имеет вид

$$U(\lambda, t) = \frac{1-\exp[-\varphi(\lambda)\,t]}{\lambda^2}, \quad u(r, t) = \int_0^\infty \frac{1-\exp[-\varphi(\lambda)\,t]}{\lambda^2}\,J_0(r\lambda)\,d\lambda \tag{32.34}$$

и может быть использовано для интерпретации кривых восстановления давления в скважинах, т. е. функции $p(r = r_c, t)$, где r_c — радиус скважины. При этом будем считать, как обычно, что внутри реальной скважины находится точечная (фиктивная) того же дебита, которая может моделировать реальную при условии, что $r_c^2/(\varkappa t) \ll \ll 1$ — относительной малости радиуса скважины, что практически всегда выполняется.

---

[1] Е. Ф. Афанасьев, В. Н. Николаевский. Нелокально-упругий режим фильтрации и восстановление давления в глубинных пластах. ПМТФ, № 5, 1969.

Из решения (32.34) имеем

$$u(r_c, t) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\psi(z, \tau, \theta, \omega)}}{z} J_0(z)\, dz, \quad \psi = \frac{\tau z^2}{1 - \omega(1 - e^{-\theta z^2})}, \quad (32.35)$$

где $\theta = d^2/(4r_c^2)$, $\tau = \varkappa t/r_c^2$. Величина $\varepsilon = \omega[1 - \exp(-\theta z^2)] < 1$, поскольку всегда $\omega < 1$, $\theta > 0$. Отметим, что

$$\psi = \frac{\tau z^2}{1-\varepsilon} = \tau z^2 \sum_{n=0} \varepsilon^n, \quad e^{-\psi} = e^{-\tau z^2} + e^{-\tau z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_m \frac{(-1)^m (\tau z^2)^m}{i!j! \ldots k!}, \quad (32.36)$$

где суммирование по m распространено на все решения в целых положительных числах уравнений $i + 2j + \ldots + lk = n$, $i + j + \ldots + k = m$.

Кроме того, имеет место разложение

$$\varepsilon^n = \omega^n (1 - e^{-\theta z^2})^n = \omega^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu n!}{\nu!(n-\nu)!} e^{-\nu\theta z^2}. \quad (32.37)$$

Подставляя ряды (32.36), (32.37) в интеграл (32.35) и интегрируя, получим

$$u = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4\tau}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \sum_m \frac{(-1)^m \tau^m}{i!\, j! \ldots k!} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu n!\,(m-1)!}{\nu!\,(n-\nu)!} \times$$

$$\times \frac{\exp(-1/8(\tau + \nu\theta))}{(\tau + \nu\theta)^{m-1/2}} M_{m-1/2}\left(\frac{1}{8(\tau+\nu\theta)}\right), \quad (32.38)$$

где введена функция Уиттекера [42]

$$M_{m-1/2}(x) = \frac{x^{1/2} e^{x/2}}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dx^{(m-1)}} (x^{m-1} e^{-x}), \quad m \geqslant 1.$$

В предельных случаях — при $\theta = 0$ и при $\theta = \infty$ — имеем соответственно

$$u_0 = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4\tau}\right), \quad u_\infty = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1-\omega}{4\tau}\right). \quad (32.39)$$

Проведем грубую оценку выхода функции $u(\tau)$ на указанные предельные при произвольном θ. При достаточно больших $\tau + \nu\theta$ имеем

$$M_{m-1/2}\left(\frac{1}{8(\tau+\nu\theta)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}(\tau+\nu\theta)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{(\tau+\nu\theta)^{3/2}}\right),$$

$$u = u_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \sum_m \frac{(-1)^m (m-1)!}{i!j! \ldots k!} \times$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^n n!}{\nu!(n-\nu)!} \left(1 + \nu\frac{\theta}{\tau}\right)^{-m} + O\left(\frac{1}{\tau}\right). \quad (32.40)$$

Если $\theta \ll \tau$, то $1 + \nu\theta/\tau \approx 1$ для главных членов разложения (32.40). Тогда в силу равенства

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^n n!}{\nu!\,(n-\nu)!} = 0$$

получим

$$u = u_0 + 0\,(1/\tau) \quad \text{при} \quad \tau \gg \theta. \tag{32.41}$$

В начальные моменты времени $\theta \gg \tau$. Тогда в разложении (32.40) главными являются члены при $\nu = 0$, а члены $\nu \neq 0$ имеют порядок $0(\tau/\theta)$ и выше. Сохранив соответственно в разложении (32.37) лишь первый член $\varepsilon^n = \omega^n$, получаем $\psi = \tau z^2 (1-\omega)^{-1}$, что дает $u = u_\infty$. Отсюда окончательно имеем оценку

$$u = u_\infty + 0\,(\tau/\theta) \quad \text{при} \quad \tau \ll \theta. \tag{32.42}$$

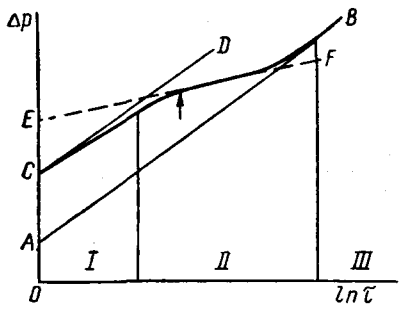


Рис. 57. Характерный вид кривой восстановления давления при учете нелокально-упругих эффектов.

Фиксируемое в реальных скважинах возрастание давления $\Delta p = p\,(r_c, t) - p\,(r_c, 0)$ выражается согласно формуле (32.33) через полученное решение для $u\,(\tau)$. В соответствии со сказанным выше можно выделить три характерных участка кривой восстановления давления. Участок *I* соответствует интервалу времени $0 \leqslant \tau < 0{,}1\,\theta$:

$$\Delta p = -\frac{Q\mu}{4\pi kh} Ei\left(-\frac{1-\omega}{4\tau}\right) \approx \frac{Q\mu}{4\pi kh}\left(\ln\frac{2{,}25}{1-\omega} + \ln\tau\right). \tag{32.43}$$

Участок *II* соответствует интервалу $0{,}1\theta < \tau < 10\theta$. Здесь изменение давления будем приближенно описывать тремя членами разложения (32.40), соответствующими слагаемым порядка ε^0, ε^1, ε^2, ε^3 в представлении (32.41)

$$\Delta p \approx \frac{Q\mu}{2\pi kh}\left(\ln\frac{2{,}25}{1-\omega}\tau - \frac{\omega\,(1+2\omega+3\omega^2)}{2\,(1+\theta/\tau)} + \frac{\omega^2\,(1+3\omega)}{(1+\theta/\tau)^2} - \right.$$
$$- \frac{\omega^3}{2\,(1+\theta/\tau)^3} + \frac{\omega\,(\omega+3\omega^2)}{2\,(1+2\theta/\tau)} - \frac{\omega^2\,(1+6\omega)}{4\,(1+2\theta/\tau)^2} + \frac{\omega^3}{2\,(1+2\theta/\tau)^3} -$$
$$\left. - \frac{\omega^3}{2\,(1+3\theta/\tau)} + \frac{\omega^3}{2\,(1+3\theta/\tau)^2} - \frac{\omega^3}{6\,(1+3\theta/\tau)^3}\right). \tag{32.44}$$

Участок *III* соответствует интегралу времени $10\theta < \tau < \infty$, здесь

$$\Delta p \approx -\frac{Q\mu}{4\pi kh} Ei\left(-\frac{1}{4\tau}\right) \approx \frac{Q\mu}{4\pi kh}\,(\ln 2{,}25 + \ln\tau). \tag{32.45}$$

Примерный вид теоретической кривой восстановления давления представлен на рис. 57. Асимптота *CD* соответствует меньшей сжи-

маемости и большей пьезопроводности пласта (кровля и подошва пласта еще неподвижны), асимптота AB — максимальной сжимаемости пласта (кровля и подошва пласта сжимают скелет пористой среды); обе асимптоты описываются одной и той же традиционной формулой упругого режима фильтрации (32.43) и (32.45) с одинаковой проводимостью kh/μ, но с разными эффективными параметрами пьезопроводности $\varkappa/(1-\omega)$ и $\varkappa$).

Проведем числовые оценки. Пусть $d = 20$ *м*, $r_c = 10$ *см*, $\varkappa = 10^4$ *см*^{2}/*сек*. Тогда $\theta = 10^4$ и продолжительность интервала I будет $\tau_1 = 0{,}1\,\theta = 10^3$, или $t = 10$ *сек*. Участок III начнется при $\tau_2 = 10\theta = 10^5$, или при $t = 1000$ *сек*. Таким образом, продолжительность переходного участка II будет порядка 17 *мин*.

Из этого примера видно, что при практических замерах на скважинах участок I может быть вообще пропущен, а основным объектом наблюдения может служить участок кривой II. При этом его первую половину (до стрелки на рис. 57) можно принять за дефектную часть кривой (например, из-за немгновенного закрытия скважины), а вторую (после стрелки) — за асимптоту AB. Тогда проведение по экспериментальным точкам ложной асимптоты EF (пунктир) приведет к завышению коэффициента пьезопроводности $\varkappa$ и уменьшению проводимости kh/μ по сравнению с их действительными значениями.

В случае малопроницаемых пластов ($\varkappa$ мало) на кривых восстановления давления может быть зафиксирован участок I. Тогда переход на участок II (до стрелки) может быть ложно принят за асимптоту, соответствующую традиционной теории упругого режима фильтрации.

В заключение подчеркнем, что при очень больших временах восстановления давления предположение о стационарности начального восстановления давления перестает выполняться. Необходимая корректива, как известно, состоит в том, что строится график зависимости Δp от $\ln\{\tau/(T+\tau)\}$, где T — время работы исследуемой скважины до момента ее закрытия.

Недавно Энгелундом и Серенсеном [1] было предложено толщу пород выше насыщенного пласта моделировать упругой пластиной, прогиб которой l_z из-за снижения давления Δp удовлетворяет уравнению $(D\,\partial^4/\partial x^4 + E/h)\,l_z = \Delta p$. Здесь D — жесткость пластины; E — модуль Юнга скелета пласта; h — мощность пласта, так что $\sigma' = -El_z/h$. Это уравнение, предлагаемое вместо гипотезы (18.4), позволяет определить функцию влияния Φ в условии (18.3) теории [170] нелокально-упругого режима. Вычисляемая таким образом функция Φ хорошо аппроксимируется принятой в данной книге гауссовской кривой, как в плоском, см. (21.41), так и в осесимметричном, см. (21.45), случаях. Е. Ф. Афанасьев показал, что параметру d придается при этом следующий смысл: $d = 2\,(4hD/\pi^2E)^{1/4}$. Гауссовский вид функции Φ облегчает построения решений.

---

[1] F. Engelund, T. Serensen. The effect of upper stratum rigity on pumping from elastic artesian aquifers. Basic Res., Progr. Rep. Techn. Univ. Denmark, Copenhagen, Ang., 1969, vol. 19, pp. 17—20.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авакян Э. А. Осесимметричная задача фильтрации жидкости в трещиноватых пластах. Тр. ВНИИ, вып. 50, 1967.

2. Антонов А. Д. Экспериментальное определение коэффициента сжимаемости песчаников. Тр. УфНИИ, вып. 2, 1957.

3. Бабалян Г. А. О факторах, обусловливающих аномально высокие начальные давления в пластах. Тр. нефт. экспед., Баку, 1953, № 1, стр. 87—93.

4. Багдоев А. Г. Распространение давления в двухфазной жидкости. Вестн. МГУ, № 3, 1961.

5. Багов М. С., Цой В. И. Экспериментальное определение коэффициента сжимаемости известняков. Тр. ГрозНИИ, вып. 13. М., Гостоптехиздат, 1962.

6. Бан А. Определение времени запаздывания восстановления давления в трещиноватой породе. Изв. АН СССР, ОТН, сер. «Механика и машиностроение», 1961, № 4.

7. Бан А., Басниев К. С., Николаевский В. Н. Об основных уравнениях фильтрации в сжимаемых пористых средах. ПМТФ, 1961, № 3.

8. Бан А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М., Гостоптехиздат, 1962.

9. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.

10. Баренблатт Г. И., Крылов А. Н. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 2.

11. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации в трещиноватых породах. ПММ, т. 27. вып. 2, 1963.

12. Баренблатт Г. И. О движении газожидкостных смесей в трещиновато-пористых породах. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1964, № 3.

13. Баренблатт Г. И. О возможности линеаризации в некоторых задачах нестационарной фильтрации газа. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 11.

14. Баренблатт Г. И., Трифонов Н. Л. О некоторых осесимметричных задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 1.

15. Баренблатт Г. И. и др. Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 11.

16. Баренблатт Г. И., Максимов В. А. О влиянии неоднородностей на определение параметров нефтеносного пласта по данным нестационарного притока жидкости к скважинам. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 7.

17. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, т. 132, № 3, 1960.

18. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ПММ, т. 24, вып. 5, 1960.
19. Басниев К. С., Цыбульский Г. П. Применение преобразования Лейбензона для обработки кривых восстановления давления в газовых скважинах. Изв. вузов, «Нефть и газ», 1964, № 1.
20. Басниев К. С. Стационарный приток реального газа к скважине в деформируемом пласте. НТС по добыче нефти, ВНИИнефтегаз, вып. 25, М., изд-во «Недра», 1964.
21. Белаш П. М., Гофлин А. Л., Чен Син Э. Электрическое моделирование процессов разработки газовых месторождений. НТС по добыче нефти, вып. 2, М., Гостоптехиздат, 1961.
22. Берчик Э. Дж. Свойства пластовых жидкостей. М., Гостоптехиздат, 1960.
23. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. Докл. АН СССР, т. 155, № 6, 1964.
24. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. Оценка влияния отклонений от закона Дарси на форму индикаторных линий. Изв. АН СССР, ОТН, 1962, № 1.
25. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом адсорбции. ПМТФ, 1962, № 5.
26. Бондарев Э. А. О волнах Релея в уплотняемых пористых средах. Тр. V сессии Ученого совета по взрыву, АН КиргССР, Фрунзе, изд-во «ИЛИМ», 1965.
27. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. К постановке задач теории фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах. НТС по добыче нефти, № 30, М., изд-во «Недра», 1966.
28. Бондарев Э. А., Шкирич А. Р. Экспериментальное исследование продольной и поперечной конвективной диффузии в пористой среде. Изв. АН СССР, серия «Механика», 1965, № 6.
29. Борисов Ю. П. Определение дебита скважин при совместной работе нескольких рядов скважин. Тр. МНИ, вып. 2, М., Гостоптехиздат, 1951.
30. Борисов Ю. П. О рациональном размещении нефтяных скважин в полосовой залежи. Труды ВНИИ, вып. 8., М., Гостоптехиздат, 1956.
31. Борисов Ю. П., Яковлев В. П. Определение параметров продуктивных пластов по данным гидроразведки. Новости нефтяной техники, «Нефтепромысловое дело», 1957, № 2.
32. Борисов Ю. П. Определение параметров пласта при исследовании скважин на неустановившихся режимах с учетом продолжающегося притока жидкости. В сб. «Разработка нефтяных месторождений и подземная гидродинамика». М., Гостоптехиздат, 1959.
33. Борисов Ю. П. К гидродинамическим расчетам при упругом режиме. Тр. ВНИИ, вып. 8, М., Гостоптехиздат, 1956.
34. Борисов С. Н., Николаевский В. Н., Радченко В. П. О структуре ударной волны в водонасыщенном грунте. Изв. АН СССР, серия «Механика жидкостей и газа», 1967, № 3.
35. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы». Вып. 1, М., Госатомиздат, 1963.
36. Бузинов С. И. К вопросу об определении остаточной нефтенасыщенности. Докл. АН СССР, т. 116, № 1, 1957.
37. Бузинов С. И., Умрихин И. Д., Эйхман В. Н. Влияние границ пласта на характер изменения давления в реагирующих скважинах. Тр. ВНИИ, вып. 37, М., Гостоптехиздат, 1961.
38. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Исследование пластов и скважин при упругом режиме фильтрации. М., изд-во «Недра», 1964.
39. Бурлаков И. А., Фурсова Н. П. Некоторые данные о зависимости проницаемости гранулярных и трещиноватых пород от горного давления и температуры. Тр. ГрозНИИ, вып. 17, М., изд-во «Недра», 1964.

40. Базиев В. Ф. и др. Формы индикаторных диаграмм по скважинам, эксплуатирующим одновременно несколько пластов. «Татарская нефть», 1960, № 4.
41. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности, М., ИЛ, 1955.
42. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, часть I. Перевод с англ. М., ИЛ, 1949.
43. Веригин Н. Н. Об уплотнении грунтов под нагрузкой. ПМТФ, 1961, № 1.
44. Веригин Н. Н. Консолидация грунта под гибким фундаментом (плоская задача). «Основания, фундаменты и механизм грунтов», 1961, № 5.
45. Гацулаев С. С. Стационарный приток реального газа к забою скважин. «Газовая промышленность», 1963, № 3.
46. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. Изд. 3-е, М.—Л., Стройиздат, 1937.
47. Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практическое применение. М., Госстройиздат, 1948.
48. Гольдштейн М. И. Механические свойства грунтов. М., Госстройиздат, 1952.
49. Горбунов А. Т., Николаевский В. Н. Установившийся приток жидкости к скважинам при упругом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, 1961, № 5.
50. Горбунов А. Т. К определению параметров пласта при упругом режиме фильтрации. «Инженерный журнал», т. II, № 3, 1962.
51. Горбунов А. Т. Установившийся приток газированной жидкости к скважинам в деформируемой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1962, № 1.
52. Горбунов А. Т., Николаевский В. Н. О нелинейной теории упругого режима фильтрации. Добыча нефти. Ежегодник ВНИИ, М., изд-во «Недра», 1964.
53. Горбунов А. Т. Вопросы разработки нефтяных месторождений, представленных трещиноватыми коллекторами. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук, М., ВНИИнефтегаз, 1963.
54. Горбунов А. Т. Установившийся приток жидкости к скважине с учетом изменения проницаемости в двучленном законе фильтрации. Гр. ВНИИ, вып. 50, М., изд-во «Недра», 1967.
55. Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Перевод с англ. М., изд-во «Мир», 1964.
56. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Баку, Азерб. гос. изд-во, 1961.
57. Гудок Н. С., Кусаков М. М. Экспериментальное исследование влияния внешнего давления на проницаемость нефтесодержащих пород. Докл. АН СССР, т. 119, вып. 2, 1958.
58. Гуревич Л. Э. Основы физической кинетики. М.—Л., Гостоптехиздат, 1940.
59. Дересевич Г. Механика зернистой среды. Сб. «Проблемы механики». Перевод с англ., вып. II, М., ИЛ, 1961.
60. Добрынин В. М. Физические свойства нефтегазовых коллекторов в глубоких скважинах. М., изд-во «Недра», 1965.
61. Добыча и транспорт газа. Под ред. В. Н. Раабена и И. Е. Ходановича. М., Гостоптехиздат, 1955.
62. Дремин А. Н., Ададуров Г. А. Ударная адиабата мрамора. Докл. АН СССР, т. 128, вып. 2, 1959.
63. Дремин А. Н., Карпухин И. А. Метод определения ударных адиабат для дисперсных веществ. ПМТФ, 1960, № 3.
64. Ентов В. М. Об исследовании скважин на нестационарный приток при нелинейном законе фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1964, № 6.
65. Ентов В. М., Сухарев М. Г. Автомодельный случай плоскорадиальной нестационарной фильтрации при нелинейном законе сопротивления. Изв. вузов, серия «Нефть и газ», 1965, № 4.

66. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
67. Желтов Ю. П. О движении однофазной жидкости в деформируемых трещиноватых породах с чисто трещинной пористостью. ПМТФ, 1961, № 6.
68. Желтов Ю. П., Золотарев П. П. О фильтрации газов в трещиноватых породах. ПМТФ, 1962, № 5.
69. Желтов Ю. П. Деформации горных пород. М., изд-во «Недра», 1966.
70. Жуковский Н. Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод (1889 г.). Полн. собр. соч., т. 7, М., ГПИ, 1937.
71. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
72. Зиновьева Л. А. Приближенный метод расчета притока газированной нефти к скважинам с учетом реальных свойств пластовых нефтей. Тр. ВНИИнефтегаз, вып. 6, М., Гостоптехиздат, 1954.
73. Зиновьев Н. П. Расчет поля давления в неоднородном пласте при неустановившейся фильтрации жидкости. «Татарская нефть», 1952, № 4.
74. Золотарев П. П. Об уравнениях теплопроводности в гетерогенных сплошных средах. «Инженерный журнал», т. III, № 3, 1963.
75. Золотарев П. П. Об уравнениях сохранения энергии для пористой среды с жестким скелетом, насыщенной жидкостью или газом. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 3—4. М., изд-во «Недра», 1964.
76. Золотарев П. П. Об уравнениях термоупругости для насыщенных жидкостью или газом пористых сред. «Инженерный журнал», т. V, № 3, 1965.
77. Золотарев П. П., Николаевский В. Н. О распространении волн давления в насыщенных жидкостью горных породах. Тр. ВНИИнефти, вып. 42, М., изд-во «Недра», 1965.
78. Золотарев П. П. Исследование процессов упругого деформирования и теплопередачи в пористых средах. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук, М., ВНИИнефтегаз, М., 1965.
79. Золотарев П. П. Распространение упругих волн в пористых пластах, насыщенных нефтью или газом. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 5, М., изд-во «Недра», 1965.
80. Золотарев П. П., Николаевский В. Н. Термодинамический анализ нестационарных процессов в насыщенных жидкостью и газом деформируемых пористых средах. В кн. «Теория и практика добычи нефти». Ежегодник. М., изд-во «Недра», 1966.
81. Золотарев П. П. О распространении слабых возмущений в смесях. Изв. АН СССР, ОТН. Серия «Механика и машиностроение», 1964, № 4.
82. Золотарев П. П. Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом. «Инженерный журнал», т. IV, вып. 1, 1964.
83. Золотарев П. П., Николаевский В. Н., Степанов В. П. Особенности распространения упругих волн в пористых породах, насыщенных нефтью, газом и смесью жидкости и газа. В кн. «Теория и практика добычи нефти», Ежегодник. М., изд-во «Недра», 1966.
84. Зотов Г. А., Малых А. С. О совместной работе центральной скважины и концентричной к ней батареи в круговом пласте. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 2, М., изд-во «Недра», 1965.
85. Зотов Г. А. Приближенное решение задачи о первой фазе нестационарной фильтрации реального газа в пласте, параметры которого зависят от давления. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 1. М., Гостоптехиздат, 1963.
86. Зотов Г. А. О приближенных методах учета реальных свойств газа и реальных условий притока газа к забою скважины в обратных задачах подземной газогидродинамики. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 3—4, М., изд-во «Недра», 1965.

87. Зотов Г. А., Вишневецкий Н. Н., Тверковкин С. М. Методика оценки запасов газа мелких месторождений по результатам опытной эксплуатации одной скважины. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 5, М., изд-во «Недра», 1965.

88. Зотов Г. А., Коротаев Ю. П., Кичиев К. Д. Приближенный метод расчета работы неравномерной системы скважин в изолированном газовом пласте. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 5, М., изд-во «Недра», 1965.

89. Зотов Г. А., Кашпаров М. М. Характер индикаторных кривых скважин, эксплуатирующих одновременно два пласта с разными пластовыми давлениями. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 2, М., изд-во «Недра», 1965.

90. Зотов Г. А., Георгиев Г. Д., Ли И. С. Вопросы интерпретации результатов исследования газовых скважин. ВНИИОЭНГ, серия «Газовое дело», 1966.

91. Иванов А. Г. Изучение сейсмоэлектрического эффекта. Изв. АН СССР, серия «География и геофизика», т. 14, № 6, 1950.

92. Инструкция по исследованию газовых скважин. М., Гостоптехиздат, 1962.

93. Исакович М. А. О распространении звука в эмульсиях. ЖЭТФ, вып. 10, 1948.

94. Исаков Г. В. О деформациях нефтяных коллекторов. «Нефтяное хозяйство», 1948, № 11.

95. Катц Д. А. Руководство по добыче, транспорту, переработке природного газа. М., изд-во «Недра», 1965.

96. Кисляков Ю. П., Демин Н. В., Русских В. Н. Влияние градиентов давления на величину параметров пласта на Туймазинском месторождении. «Нефтяное хозяйство», 1964, № 2.

97. Клейман Я. З. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде. ПММ, т. 22, вып. 2, 1958.

98. Клейман Я. З. К вопросу о затухании гармонических волн в смесях. «Акустический журнал», т. IV, вып. 4, 1958.

99. Кобранова В. Н. Физические свойства горных пород. М., Гостоптехиздат, 1962.

100. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. Перевод с англ. М., изд-во «Мир», 1964.

101. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. Перевод с англ. М., ИЛ, 1955.

102. Коротаев Ю. П., Зотов Г. А. Использование кривых стабилизации давления в газовых скважинах для определения параметров пласта. Тр. ВНИИгаза, вып. 18 (26), М., Гостоптехиздат, 1963.

103. Коротаев Ю. П., Зотов Г. А. О форме индикаторных кривых скважины, вскрывшей несколько продуктивных горизонтов. Тр. ВНИИгаза, вып. 18 (26), М., Гостоптехиздат, 1963.

104. Коротаев Ю. П., Полянский А. П. Эксплуатация газовых скважин. М., Гостоптехиздат, 1961.

105. Коротаев Ю. П., Зотов Г. А., Кичиев К. Д. Методика проектирования разработки газовых и газоконденсатных месторождений. М., изд-во «Недра», 1966.

106. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. ПММ, т. 23, вып. 6, 1959.

107. Косачевский Л. Я. Об отражении звуковых волн от сложных двухкомпонентных сред. ПММ, т. 25, вып. 6, 1961.

108. Котяхов Ф. И. Основы физики пласта. М., Гостоптехиздат, 1956.

109. Коул Р. Подводные взрывы. Перевод с англ. М., ИЛ, 1950.

110. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II, М.—Л., ГТТИ, 1948.

111. Кристеа Н. Подземная гидравлика. Перевод с румынского. Т. II, М., Гостоптехиздат, 1962.

112. Крылов А. П. и др. Проектирование разработки нефтяных месторождений. М., Гостоптехиздат, 1962.
113. Кузнецов С. В. Об одной модели пористого грунта. (Геометрические параметры и коэффициент фильтрации грунта.) ПМТФ, 1961, № 1.
114. Кузьмичев Д. Н. Уравнение притока жидкости в скважину из трещиноватого коллектора. Тр. ГрозНИИ, вып. 10, М., Гостоптехиздат, 1961.
115. Кусаков М. М., Гудок Н. С. Влияние внешнего давления на фильтрационные свойства нефтесодержащих пород. «Нефтяное хозяйство», 1958, № 6.
116. Кутовая Д. В. Влияние внешнего давления на фильтрационные свойства трещиноватых пород и раскрытие трещин. «Нефтяная и газовая промышленность», Киев, 1962, № 1.
117. Кутляров В. С. Об определении параметров трещиновато-пористых пластов по данным нестационарного притока жидкости к скважинам. Тр. ВНИИ, вып. 50. М., изд-во «Недра», 1967.
118. Лан Чжан-синь. Приближенный метод решения задачи нестационарной фильтрации газа в круговом пласте. Тр. МИНХ и ГП, вып. 33, М., Гостоптехиздат, 1961.
119. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Техтеориздат, 1954.
120. Лапук Б. Б. О термодинамических процессах при движении газа в пористых пластах. «Нефтяное хозяйство», 1940, № 3.
121. Лапук Б. Б. О температурных изменениях при движении сырой нефти в пористых пластах. «Нефтяное хозяйство», 1940, № 4, 5.
122. Лапук Б. Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов. М., Гостоптехиздат, 1948.
123. Лапук Б. Б. Движение реальных газов в пористой среде. Докл. АН СССР, т. VIII, № 3, 1947.
124. Лапук Б. Б., Евдокимова В. А. Определение параметров газовых пластов по данным испытания скважин. Докл. АН СССР, т. 73, № 7, 1950.
125. Лапук Б. Б., Требин Ф. А. О состоянии и задачах дальнейшего развития теоретических основ разработки газовых месторождений. Тр. МИНХ и ГП, ГОСИНТИ, 1961.
126. Лапук Б. Б., Абуталиев Э. Б., Закиров С. Н. Неустановившееся движение газов в пористой среде при нелинейном законе фильтрации. В сб. «Вопросы вычислительной математики», № 1, Ташкент, 1963.
127. Лапук Б. Б., Владимиров Л. Н. Неустановившаяся фильтрация газа к батареям скважин. «Газовая промышленность», 1963, № 1.
128. Лапук Б. Б., Абуталиев Э. Б. Метод приближенного аналитического решения задачи нестационарной фильтрации газа к батареям скважин в пласте переменной мощности. Изв. вузов, серия «Нефть и газ», 1963, № 12.
129. Левшин А. Л. Определение уровня грунтовых вод сейсмическими методами. Изв. АН СССР, серия «Геофизика», 1961, № 9.
130. Лещий Н. П. Мончак Л. С., Писоцкий И. И. Влияние горного давления на проницаемость пород Долинского месторождения. Новости нефтяной техники, серия «Нефтепромысловое дело», 1962, № 2.
131. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. II, изд. АН СССР, 1953.
132. Литвинов А. А., Блинов А. Ф. Промысловые исследования скважин. М., изд-во «Недра», 1964.
133. Ляхов Г. М. Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1959, № 1.
134. Ляхов Г. М. Ударные волны в грунте и разжижение водонасыщенного песка. ПМТФ, 1961, № 1.
135. Ляхов Г. М. Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах. М., изд-во «Недра», 1964.
136. Майдебор В. Н., Таташев К. Х. Результаты исследований нагнетательных скважин на месторождении с трещинным коллектором. «Нефтяное хозяйство», 1964, № 8.

137. Майдебор В. Н., Посташ М., Ф., Лебединец Н. П., Чеховская Г. Ю. Вопросы изучения и разработки нефтяных залежей, приуроченных к мощным трещиноватым коллекторам. Тр. Всесоюзного совещания по разработке нефтяных и газовых месторождений, Киев, 1961.

138. Мандельштам Л. И., Леонтович М. А. К теории поглощения звука в жидкостях, ЖЭТФ, т. 7, 1937, стр. 438.

139. Марон В. И., Медведев В. А. К выводу уравнений энергии взаимопроникающих движений газовых сред. Вестник МГУ, серия «Математика, механика», 1963, № 1.

140. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Перевод с англ. М., Гостоптехиздат, 1949.

141. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. Перевод с англ. М., Гостоптехиздат, 1953.

142. Матвеев И. М. Определение коэффициента сжимаемости трещин карбонатных коллекторов по промысловым данным. Новости науки и техники. «Нефтепромысловое дело», 1963, № 3.

143. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Перевод с англ. М., ИЛ, 1961.

144. Минский Е. М. О турбулентной фильтрации газа в пористых средах. Докл. АН СССР, т. 78, 1951.

145. Минский Е. М. О работе системы газовых скважин, дренирующих истощающиеся газовые пласты. Тр. ВНИИгаза, вып. 9 (17), М., Гостоптехиздат, 1960.

146. Минский Е. М., Малых А. С. Применение быстродействующих счетных машин к задачам разработки газовых месторождений. «Газовая промышленность», 1961, № 6.

147. Минский Е. М., Коротаев Ю. П., Зотов Г. А. Приближенное решение задачи об установившейся фильтрации реальных газов. Тр. ВНИИгаза, вып. 18 (26). М., Гостоптехиздат, 1963.

148. Минский Е. М., Коротаев Ю. П., Зотов Г. А. Определение параметров пласта по кривым нарастания давления в газовых скважинах. «Газовая промышленность», 1959, № 5.

149. Минский Е. М., Малых А. С. О центральном расположении скважин. Тр. ВНИИгаза, вып. 18 (26), М., Гостоптехиздат, 1963.

150. Минский Е. М. и др. Нестационарное движение газа через пористые среды при нелинейном законе сопротивления. Тр. ВНИИгаза, вып. 18 (26). М., Гостоптехиздат, 1963.

151. Минский Е. М., Поздняк М. В. Приближенные методы решения задачи о нестационарном притоке газа к скважинам, дренирующим ограниченный пласт. Тр. ВНИИгаза, вып. 18 (26), М., Гостоптехиздат, 1963.

152. Мирчинк М. Ф. и др. Оценка возможности применения сейсморазведки для прямых поисков нефтяных залежей. Изд. АН СССР, 1961.

153. Мокадам. Термодинамическое исследование закона Дарси. «Прикладная механика» (JAM), 1961, № 2.

154. Морозович Я. Р. Изучение влияния напряженного состояния на электрические и коллекторские свойства горных пород. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. геол.-минерал. наук, МИНХ и ГП, 1965.

155. Морморштейн Л. М. Влияние горного давления на электрическое сопротивление и коэффициент пористости горных пород (на примере Чайдахского разведочного участка Нордвинского района). Дисс. на соиск. уч. степ. канд. геол.-минерал. наук., М., ВНИИгеофизика, 1963.

156. Муравьев И. М. и др. К анализу методов обработки кривых изменения давления в нефтяных скважинах. «Нефтяное хозяйство», 1961, № 3.

157. Немчинов И. В. Некоторые нестационарные задачи переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 1.

158. Нестеров В. С. Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации. «Акустический журнал», 1959, № 3.

159. Николаевский В. Н. Применение гидравлического разрыва на месторождении Умоаки. «Нефтяное хозяйство, 1958, № 4.

160. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах. ПММ, т. 23, вып. 6, 1959.

161. Николаевский В. Н. О подобии в среднем микроструктур поровых пространств. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1960, № 4.

162. Николаевский В. Н. Некоторые задачи распространения меченых частиц в фильтрационных потоках. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1960, № 5.

163. Николаевский В. Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа. ПМТФ, 1961, № 4.

164. Николаевский В. Н. К динамике насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред. «Инженерный журнал», т. 2, № 3, 1962.

165. Николаевский В. Н. Движение двухфазной жидкости при упругом режиме фильтрации. ПМТФ, 1962, № 1.

166. Николаевский В. Н. Линейное приближение в механике уплотняемых пористых сред. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1962, № 5.

167. Николаевский В. Н. О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах. «Инженерный журнал», т. 3, № 8, 1963.

168. Николаевский В. Н. Об основных уравнениях динамики насыщенных жидкостью упругих пористых сред. «Добыча нефти» (теория и практика), Ежегодник. 1963, М., изд-во «Недра», 1964.

169. Николаевский В. Н. Движение жидкости в пластах с деформируемым поровым пространством. Теоретические и экспериментальные исследования разработки нефтяных месторождений. Материалы межвузовской конференции 29—31 октября 1963 г. Изд. Каз. ун-та, 1964.

170. Николаевский В. Н. К изучению нелокальных эффектов при упругом режиме фильтрации в глубинных пластах. ПМТФ, 1968, № 4.

171. Николаевский В. Н. К теории ударных волн в водонасыщенных грунтах. Труды Всесоюзного симпозиума распространения упруго-пластических волн в сплошных средах (7—14 октября 1964 г., Баку), изд. АН АзербССР, 1966.

172. Николаевский В. Н. О взаимосвязях объемных и сдвиговых деформаций и об ударных волнах в мягких грунтах. Докл. АН СССР, т. 177, № 3, 1967.

173. Николаевский В. Н., Горбунов А. Т., Степанов В. П., Товбис А. Б. Некоторые численные решения уравнения политропической фильтрации газа. НТС «Геология, разработка, транспорт и использование природного газа», вып. 3—4, М., изд-во «Недра», 1965.

174. Николаевский В. Н. О неустановившихся деформациях водонасыщенных грунтов. Archivum Mechanihi stosowanej, 17, No. 3, Warszawa, 1965.

175. Николаевский В. Н. К теории неупругих деформаций пористых сред. В кн. «Теория и практика добычи нефти». Ежегодник, 1963. М., изд-во «Недра», 1964.

176. Партон В. З. Одна задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред. «Инженерный журнал», т. V, № 1, 1965.

177. Партон В. З. Осесимметричная задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред. Докл. АН СССР, т. 160, № 4, 1965.

178. Партон В. З. Дуальные интегральные уравнения в контактной задаче теории консолидации. В сб. «Расчет рам и балок, лежащих на упругом основании». Изд. МВ и ССО РСФСР, М., 1968, стр. 96—100.

179. Пилатовский В. П. Исследование неоднородного фильтрационного потока жидкостей в недеформируемой трубке тока в случае образования двухфазной смеси. Тр. ВНИИнефтегаза, вып. 21, М., Гостоптехиздат, 1959.

180. Пирвердян А. М. Приближенное решение задач о фильтрации жидкости при упругом режиме. Докл. АН АзербССР, т. VI, № 1, 1950.

181. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., ГИТТЛ, 1952.

182. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. Докл. АН СССР, т. 63, № 6, 1948.

183. Портнов И. Г. Применение метода локального осреднения и некоторые задачи фильтрации газа. Изв. АН СССР, ОТН, серия «Механика и машиностроение», 1960, № 2.

184. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1961.

185. Проблемы сейсмической разведки. Сб. переводов. М., Гостоптехиздат, 1962.

186. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроницаемых движений сжимаемых сред. ПММ, т. 20, вып. 2, 1956.

187. Радушкевич Л. В. Теория динамики адсорбции на реальном зернистом адсорбенте. Докл. АН СССР, т. 57, вып. 5, 1947.

188. Рейнер М. Феноменологическая макрореология. В кн. «Реология. Теория и приложения». Перевод с англ. М., ИЛ, 1962; Деформация и течения. Перевод с англ. М., Гостоптехиздат, 1963.

189. Релей Дж. Теория звука. Т. 2. Перевод с англ. М., ГТТИ, 1944.

190. Ризниченко Ю. В. О распространении сейсмических волн в дискретных и гетерогенных средах. Изв. АН СССР, ОТН, серия географ. и геофиз., 1949, № 2, 1949.

191. Розенберг М. Д. Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих приложение в теории фильтрации. Докл. АН СССР, т. 89, № 2, 1953.

192. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., изд-во «Недра», 1966.

193. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах. Изв. АН СССР, ОТН, сер. географ. и геофиз., т. 12, № 1, 1948.

194. Рытов С. М., Владимирский В. В., Галанин М. Д. Распространение звука в дисперсных системах. ЖЭТФ, т. 8, № 5, 1938.

195. Седов Л. И. Проблемы науки. М., изд-во «Знание», 1966.

196. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.

197. Сергеевич В. И., Жузе Т. П., Честнов А. И. Влияние давления и температуры на вязкость водных растворов электролитов и пластовых вод. Изд. АН СССР, ОТН, № 6, 1953.

198. Слезкин Н. А. О дифференциальных уравнениях фильтрации. Докл. АН СССР, т. 79, № 5, 1951.

199. Слезкин Н. А. Дифференциальные уравнения движения пульпы. Докл. АН СССР, т. 86, № 2, 1954.

200. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР, 1960.

201. Соколов Ю. Д. Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод. «Украинский математический журнал», т. V, 1953, № 2.

202. Стаханов И. П., Ступоченко Е. В. О некоторых вопросах гидродинамики релаксирующих сред. ПМТФ, 1963, № 2.

203. Степанов В. П. О деформациях пористых сред, насыщенных жидкостью при малых динамических нагрузках. Тр. ВНИИнефтегаза, вып. 42, М., изд-во «Недра», 1965.

204. Степанов В. П. Отражение звуковых волн от поверхности, разделяющей различные двухкомпонентные среды. Тр. ВНИИнефтегаза, вып. 42, М., изд-во «Недра», 1965.

205. Тан Ньюинг Ки. Вторичные временные эффекты и консолидация глин. В сб. «Вопросы геотехники». № 3, Днепропетровск, 1959.

206. Терцаги К. Теория механики грунтов. Перевод с нем., М., Госстройиздат, 1961.
207. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М., ГТТИ, 1956.
208. Требин Ф. А. Нефтепроницаемость песчаных коллекторов. М., Гостоптехиздат, 1945.
209. Требин Ф. А., Щербаков Г. В., Яковлев В. П. Гидромеханические методы исследования скважин и пластов. М., изд-во «Недра», 1965.
210. Тривус М. А., Садых-Заде Э. С., Исмаилов Д. Х. Экспериментальное исследование процессов контактной и дифференциальной конденсации газоконденсатной смеси. Изв. вузов, серия «Нефть и газ», 1965, № 2.
211. Фенчер, Люис, Бернс. Физические испытания нефтяных и газовых пластов. Серия «Иностранная нефтяная техника», вып. 105, М.—Л., 1934.
212. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. М., Госстройиздат, 1948.
213. Флорин В. А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1951.
214. Флорин В. А. Основы механики грунтов. Т. I, Госстройиздат, 1959; т. II, М., Госстройиздат, 1961.
215. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., т. 8, № 4, 1944.
216. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. Перевод с англ., М., Физматгиз, 1962.
217. Халатников И. М. Введение в теорию сверхтекучести. М., изд-во «Наука», 1965.
218. Хованский А. Н. К выводу основных уравнений фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. АН СССР, т. 89, № 2, 1953.
219. Хейн А. Л. Теоретические основы и методика определения параметров пластов по данным испытания несовершенных скважин при неустановившемся режиме фильтрации жидкости и газа. В кн. «Вопросы разработки и эксплуатации газовых месторождений». М., Гостоптехиздат, 1953.
220. Христианович С. А. О движении газированной жидкости в пористых породах. ПММ, т. 5, вып. 2, 1941.
221. Царева Н. В. Распространение упругих волн в песке. Изв. АН СССР, ОТН, серия геофиз., № 9, 1956.
222. Цвиккер К., Костен К. Звукопоглощающие материалы. М., ИЛ, 1952.
223. Цытович Н. А. Механика грунтов. Изд. 4-е, М., Госстройиздат, 1963.
224. Цянь Сюэ-сень. Об основных уравнениях динамики грунтовой массы. В сб. «Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили». Изд. АН СССР, 1961.
225. Чарный И. А. Определение некоторых параметров пластов при помощи кривых восстановления забойного давления. «Нефтяное хозяйство», 1955, № 3.
226. Чарный И. А., Умрихин И. Д. Об одном методе определения параметров пласта по наблюдениям неустановившегося режима притока к скважине. М., МНИ им. акад. И. М. Губкина, 1957.
227. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
228. Чарный И. А., Мухидинов Н. М. Изменение пластового давления при разработке газового месторождения в неограниченном водонапорном пласте. «Газовая промышленность», 1962, № 11.
229. Чекалюк Э. Б. Метод определения физических параметров пласта. «Нефтяное хозяйство», 1958, № 11.
230. Чекалюк Э. Б. Формулы радиального притока упругой жидкости к скважине из ограниченного пласта при постоянном забойном давлении и пути их практического использования при определении физических параметров залежи. М., Гостоптехиздат, 1961.

231. Чекалюк Э. Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. Киев, Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1961.
232. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М., изд-во «Недра», 1965.
233. Чернов Б. С., Базлов М. Н., Жуков А. И. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. М., Гостоптехиздат, 1960.
234. Черченко Г. В. Исследование вязкости нефтей месторождений Поволжья. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук, М., ВНИИ, 1964.
235. Шамбрэ П. Скорость плоских волн в смеси. В сб. «Проблемы современной физики. Гидроакустика». Сб. перевод., № 8. М., изд-во ИЛ, 1955.
236. Шейдеггер А. Е. Физика течения жидкости через пористые среды. Перевод с англ. М., Гостоптехиздат, 1960.
237. Шехтер О. Л. Исследование распространения поверхностных волн в двухфазной среде. Тр. НИИ оснований и фундаментов, № 16, М., Стройиздат, 1950.
238. Шипков И. В. Электрическое моделирование неустановившейся фильтрации в пористой среде. Рефераты научно-исслед. работ ВНИИгаза за 1960 г. М., Гостоптехиздат, 1961.
239. Шмыгля П. Т., Басниев К. С. Особенности обработки данных испытаний газовых скважин. «Газовая промышленность», 1959, № 12.
240. Щелкачев В. Н., Назаров С. Н. Учет влияния гидродинамического несовершенства скважины в условиях упругого режима. «Нефтяное хозяйство», 1954, № 5.
241. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. АН СССР, т. 52, № 2, 1946.
242. Щелкачев В. Н., Лапук Б. В. Курс подземной гидравлики. М.—Л., Гостоптехиздат, 1949.
243. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
244. Эфрос А. М., Даниловский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, ОНТИ НКТП, 1937.
245. Яковлев В. П. Метод поплавка и метод пробных откачек в гидравлическом анализе скважин. «Грозненский нефтяник», 1934, № 2—3.
246. Яковлев В. П. Волюметрический режим и законы фильтрации жидкостей через горные породы. «Азербайджанское нефтяное хозяйство», 1935, № 5.
247. Яковлев В. П. Гидродинамический анализ недр. Ч. I. Анализ притоков. Баку — Москва, ОНТИ, 1937.
248. Ament W. S. Sound propagation in mixtures. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 25, No. 4, 1953, p. 638.
249. Aronofsky J. S. and Ferris O. D. Transient Flow on non-Ideal gases in Porous Solids. J. of Appl. Phys., vol. 25, No. 10, 1954.
250. Aronofsky J. S. and Porter I. D. Unsteady Radial Flow of Gas thorugh Porous Media — Variable Viscosity and Compressilibity. J. of Applied Mechanics, March, 1956.
251. Beal C. The viscosity of air, water, natural gas, crude oil and its associated gases at oil field temperatures and pressure. Trans. AIME, vol. 165, 1946.
252. Bear I. On the tensor from of dispersion in porous media. J. Geophys. Res., vol. 66, 1961, pp. 1185—1197.
253. Berry J. B. Acoustic velocity in porous media. J. Petroleum Technology, No. 10, 1959.
254. Biot M. A. General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys., 12, 1941, pp. 155—164.
255. Biot M. A. Consolidation settlement under rectangular load distribution. J. of Appl. Physics., vol. 12, 1941, pp. 426—430.
256. Biot M. A. General solution of the equations of elasticity and consolidation for a porous meterial. J. of Appl. Mech., vol. 23, № 1, March, 1956, pp. 91—96.
257. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-satura-

ted Porous Solids I. Low frequency range. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 28, 1956, pp. 168—178.

258. Biot M. A. Theory of Propagation of elastic waves in fluid — saturated porous solids II. High frequency range. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 28, 1956, pp. 179—186.

259. Biot M. A., Willis D. C. The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. J. of Appl. Mech., vol. 24 (Trans. AIME, vol. 790), 1957, pp. 594—601.

260. Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. J. of Appl. Phys., vol. 33, No. 4, 1962 (Русский перевод. Сб. «Механика», № 6/82, М., ИЛ, 1963.)

261. Biot M. A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 34, No. 9, 1962, pp. 1254—1264. (Русский перевод. Сб. «Механика», М., ИЛ, № 6 (82), 1963.)

262. Brandt H. A study of the speed of sound in porous granular media (Trans. AIME, vol. 77, 479). J. of Appl. Mech., vol. 22, No. 4, December, 1955.

263. Bruce J. H., Rachford H. H., Peaceman D. W., Rice T. D. Calculation of Unsteady-state gas flow through porous media. Trans AIME, vol. 198, 1953.

264. Brutsaert W. The propagation of elastic waves in unconsolidated unsaturated granular mediumu. Geophys. Res., vol. 69, No. 2, January, 15, 1964.

265. Brutsaert W. The velocity of sound in soils near the surface as a function of moistrure content. J. Geophys. Res., vol. 69, No. 4, February, 15, 1964.

266. Carpenter Ch. B., Spencer G. B. Compressibility measurement of Consolidated Oil Sands. The Oil Weekly, vol. 100, No. 3, December, 23, 1940.

267. Carter R. D. Solution of Unsteady State Gas Flow. J. Petroleum Technology. May, 1962.

268. Chadwick P., Cox A. D., Hopkins H. G. Mechanics of deep underground explosions. Philisoph. trans. Royal Soc. of London, Ser. A., N 1070, vol. 256, 1964, p. 235—300. (Русский перевод Чедвик, Кокс, Гопкинс. Механика глубинного подземного взрыва. М., Мир, 1966.)

269. Chatas A. T. A practical treatment of nonsteady state flow problems in reservoir sistems. P. 1, 2, 3. The Petroleum Engineer, May, 1953; June, 1953; August, 1953.

270. Cooper H. H., Bredehoeft J. D., Papandopulos J. S., Bennet R. B. The response of well-aquifer systems to seismic waves. J. Geophys. Res., vol. 70, No. 16, August, 15, 1965.

271. Clark J. F. On the propagation of small disturbances in a relaxing gas with heat addition J. Fluid Mech., vol. 20, p. 2, pp. 209—223.

272. Crank I. The mathematics of diffusion. Oxford, Clarendon Puss. 1956, pp. 177—183.

273. Crayer C. W. A comparison of the three-dimentional consolidation theories of Biot and Terzaghi. Quart., J. of Appl. Math., vol. XVI, 1963, p. 4.

274. Debye P., Anderson Jr., Brumberger A. Scattering by on inhomogeneous solid II. The correlation function and its applications. J. of Appl. Phys., vol. 28, No. 6, June, 1957.

275. Deresiewicz H. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: l. Reffection of plane waves at a free plane boundary (non-dissipative case). Bull. Seism. Soc. America, vol. 50, No. 4, October, 1960, pp. 599—607.

276. Deresiewicz H. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: 2. Love waves in a porous layer. Bull. Seism. Soc. Amer. vol. 51, 1961, pp. 51—59.

277. Deresiewicz H. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: 4. Bull. Seismol. Soc. Amer., vol. 52, No. 3, 1962.

278. Deresiewicz H., Rice I. T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: 5. Transmission arross a plane interface. Bull. Seism. Soc. Amer. 54, No. 1, February, 1964, pp. 409—416.

279. Deresiewicz H., Rice I. T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: 6. Love waves in a double Surface Layer. Bull. Seism. Soc. Amer. February, 1964, pp. 417—423.

280. Deresiewicz H., Rice I. T. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: 7. Surface waves in a halfspace in a presence of liquid layer. Bull. Seism. Soc., Amer. February, 1964, pp. 425—430.

281. Derski W. I. 1. Theorem on reciprocity of displacements in the theory of consolidation. 2. Equation of the consolidation theory for the case of a source of fluids. Bull. l'Acad. Polon. Sci. techn., vol. XIII, No. 1, 1965.

282. Engelhardt W., Tunn L. H. The flow fluids through sandstones. Producers Monthly, vol. 20, No. 7, 1956, pp. 38—43.

283. Fatt I. The effect of overburden pressure on relative permeability. J. Petrol. Technol., No. 10, 1953.

284. Fatt I., Davis D. H. Reduction in permeability with overburden pressure. Trans AIME, vol. 155, 1956.

285. Fatt I. Compressibility of Sandstones at low to Moderate Pressures. Bull. Amer. Assoc. of Petrol. Geolog. vol. 42, No. 8, August, 1958.

286. Fatt I. The Biot-Willies elastic coefficients for a sandstone. J. of Appl. Mech., r. 26, No. 2, 1959.

287. Ferrel H. H., Felsenthal M., Walfe J. W. Effect of Overburden pressure on Flow Capacity in a Deep Oil Reservoir. J. of Petroleum Technology, vol. 14, No. 9, September, 1962.

288. Gassmann F. Elastic waves through a packing of spheres. Geophysics., vol. 16, No. 4, 1954.

289. Gassmann F. Uber die Elastizitat Poröser Medien. Mitteilungen aus dem Institut fur Geophysik, No. 17, 1951, pp. 1—23.

290. Gardner G. H. F. Extensional Waves in Fluid — Saturated Porous Cylinders. J. Acoust. Soc. America, vol. 34, No. 1, 1952, pp. 36—40.

291. Geertsma J. A remark on the analogy between thermoelasticity and the elasticity of saturated pormes oudia. J. Mech. Phys. Solids, vol. 6, 1957, pp. 13—16.

292. Geertsma J. The effect of fluid pressure decline on volumetric changes of porous rocks. Trans. AIME, vol. 210, 1957, p. 331.

293. Geertsma J., Smit D. C. Some aspects of elastic wave propagation of fluid-saturated porous solids. Geophysics. vol. 26, No. 2, April, 1961.

294. Geertsma J. Velocity — log interpretation: the effect of rook bulk compressibility. J. Petrol. Engrs. vol. 1, No. 4, 248, 1961, p. 235.

295. Gheorghitza St. I. On the non-steady motion of visco-plastic liquids in porous media. J. Fluid Mech., vol. 20, Part 2, 1964, pp. 273—280.

296. Gheorghita St. I. Metode matematice in hidrodynamica subterana; Ed. Academici R. S. R., Bucuresti, 1966.

297. Hall H. N. Compressibility of Reservoir Rocks, J. of Petroleum Technology, No. 1, 1953, pp. 17—19.

298. Hinze J. O. Momentum and mechanical-energy balance equations for a flowing homogeneus suspension with slip between the two phases. Appl. Sci. Res., Sect. A, vol. 11, No. 1, 1962.

299. Jacob C. E. On the flow of water in an elastic artesian aquifer. Trans. Americ. Geophys. Union, Reports and papers, Hydrology, 1940.

300. Jenkins R. Aronofsky J. Unstady Radial Flow of Gas through Porous Media. J. of Appl. Mech., vol. 20, No. 2, June, 1952.

301. Jones J. P. Rayleigh waves in a porous, elastic saturated solid. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 33, No. 7, July, 1961.

302. Jones J. P. Effect of a Uniform Flow an Elastic Waves in a Porous, Saturated Elastic Solid. J. Acoust. Soc. Amer. vol. 34, 1962, pp. 1172—1175.

303. Kevin I. R. et al. Some practical aspects of unsteady-state gas Flow related to gas-well performance. J. of Petroleum Technology, No. 1, 1963.

304. Lester O. C. Seismic weathered or aerated surface layer. Bull. Amer. Assoc. Petrol. Geolog., vol. 16, No. 12, December, 1932, pp. 1230—1234.

305. Lyons P. The low velocity layer in seismic exploration. Mines Magaz., vol. 35, No. 10, 1945.

306. Mac Roberts D. T. Effect of Transient Conditions in Gas Reservoir. Trans. AIME, vol. 186, 1949.
307. Mandl G. Change in sceletal volume of a fluid-filled porous body under stress. J. Mech. Phys. Solids, vol. 12, No. 5, November, 1964.
308. Mc Latchie A. S., Hemstock R. A., Young J. W. The Effective Compresseibility of Reservoir Rock, its Effects on Permeability. J. of Petrol. Technol., vol. 10, No. 6, June, 1958.
309. Mc Namee G., Gibson R. E. Displacement Functions and Linear Transforms Applied to Diffusion Through Porous elastic Media. Quart. J. Mech. Appl. Math., vol. 13, 1960, pp. 98—111.
310. Morse R. W. Acoustic propagation in granular media. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 24, 1952, pp. 696—700.
311. Nikolaevskii V. N. On some relaxation process connected with heterogeneity of continuous media. XI International Congress of applied mechanics (Munich, Aug, 30, September, 1964), Springer, Berlin, 1966, pp. 862—867.
312. Nikolaevskii V. N. Transfer phenomena in fluid-saturated porous media. «Irreversible Aspects of continuum mechanics and transfer in moving fluids, IUIAM Symposia, Vienna 1966», Springer — Verlag, NY — Wien, 1968, pp. 250—258.
313. Prigogine I., Mazur P. Sur deux formations de l'hydrodynamique at le probleme de l'helium liquide II. Physica, vol. 17, No. 7, July, 1951, p. 661.
314. Rudinger G. Some properties of shock relaxation in gas flows carrying small particle. The Physics of fluids, vol. 7, No. 5, May, 1964.
315. Scheidegger A. E. On the theory of flow underground fluids in compressible Strata. Canad. J. Physics, vol. 37, No. 3, 1959.
316. Taylor D. W., Merchant W. A theory of clay consolidation conting for secondary compression, J. Math. and Physics, vol. 19, No. 3, 1940, pp. 167—185.
317. Tec M. R., Grove M. L., Poettmann F. N. Method for Prodicting the Back — Pressure Behavior of flow Permeability Natural Gas Wells. J. of Petroleum Technology, vol. 9, No. 11, 1967.
318. Thomas H. E. Fluctuations of ground — water levels during the earthquakes of November 10, 1938 and January 24, 1939. Bull Seism. Soc. Amer., vol. 30, No. 2, April, 1940.
319. Truesdell C. Sulle Basi della termomechanica. Rend. dell' Acad. Nazion. dei Lincei. ser. VIII, vol. XXII, Gennao e Febbr., 1957 (English translation: on the foundation of mechanics and energetics. Continuum mechanics v. 11, Internat Sci, Rev. Series, Gordon and Breach Inc., New York — London — Paris, 1965).
320. Truesdell C. Mechanical basis of diffusion. J. Chem. Phys., vol. 37, No. 10, November, 1952.
321. Urick R. J. Theoretical and observed absorption of sound in suspensions. J. Acoust. Soc. Amer., vol. 20, No. 2, 1948, p. 225.
322. Urick K. J., Ament W. S. The propagation of sound in composite media. J. Acoust Soc. Amer., vol. 21, No. 1, p. 62, No. 2, pp. 115—119, 1949.
323. Van Deemter J. J., Van der Laan E. T. Momentum and energy balances for dispersed two-phases flow. Appl. Sci. Res., Sect. A, vol. 10, No. 2, 1961.
324. Warren J. E., Root P. J. The behaviour of naturally fractured reservoirs. J. Soc. Petrol. Eng., vol. 3, No. 3, September, 1963.
325. Wickoff R. D. and Botset H. G. The Flow of Gasliquid Mixtures throug Sands. Physics, vol. 7, 1936.
326. Wyllie M. R., Gregory A. R., Gardner L. W. Elastic wave velocities in heterageneous and porous media. Geophysics, vol. 21, No. 1, 1956.
327. Willie M. R., Gregory A. R., Gardner C. H. F. An experimental investigation of factors affecting elastic wave velocities in porous media. Geophysics, vol. 23, No. 3, 1958.
328. Wilson I. W. Determination of relative permeability under simulated reservoir conditions. AICHE Journ., Marcl, 1956.
329. Wood A. B. A textbook of sound. London, 1930.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Часть I. ДИНАМИКА НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

(*В. Н. Николаевский*)

Условные обозначения к I части 7

Глава I. **Уравнения динамики насыщенных пористых сред** 10

§ 1. Методы осреднения и параметры сплошной среды 10
§ 2. Кинематика жидких частиц в фильтрационном потоке . . 14
§ 3. Уравнения неразрывности массы и импульса 22
§ 4. Термодинамика насыщенных пористых сред 31
§ 5. Линеаризованная система уравнений движения 41
§ 6. Сопоставление предложенных систем уравнений 52

Глава II. **Звуковые монохроматические волны в насыщенных пористых средах** 61

§ 7. Дисперсионные соотношения для продольных и поперечных волн 61
§ 8. Волны давления и переупаковки в мягких средах 69
§ 9. Роль межфазового теплообмена при распространении звука. Мягкие среды 79
§ 10. Распространение звука в сцементированных пористых средах 86
§ 11. Оценка области применимости рассматриваемой теории 95
§ 12. Электросейсмический эффект 105

Глава III. **Нестационарные движения насыщенных пористых сред** 106

§ 13. Линейные задачи о слабых динамических воздействиях на мягкие среды 109
§ 14. Теория фильтрационной консолидации 121
§ 15. Скачки давления и напряжения в сильно сцементированных пористых средах 129
§ 16. Взаимодействие волн с границами в насыщенных пористых средах 135
§ 17. Структура сильных ударных волн в мягких насыщенных средах 142

Стр.

Часть II. УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

(*К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов, В. Н. Николаевский*)

Условные обозначения к II части 153

Глава IV. **Исходные физические предпосылки упругого режима фильтрации** . . . . . .

§ 18. Напряженное состояние глубинных коллекторов. Упругий режим фильтрации 155
§ 19. Пористость и проницаемость пласта как функции пластового давления 163
§ 20. Свойства пластовых жидкостей, газов и газожидкостных смесей 185

Глава V. **Основные уравнения процесса фильтрации** 194

§ 21. Элементарный вывод уравнения упругого режима фильтрации жидкости и газа 194
§ 22. Фильтрация жидкости и газа в трещиновато-пористых средах 204

Глава VI. **Основные модельные задачи и их решения** 212

§ 23. Стационарные течения 212
§ 24. Основные автомодельные решения. Первая и вторая фазы течения. Проявление нелокальных эффектов 219
§ 25. Приближенные решения нелинейных уравнений 227
§ 26. Неустановившаяся фильтрация однородной жидкости в трещиновато-пористых средах 237

Глава VII. **Установившийся приток к скважинам** 247

§ 27. Основные представления метода исследования скважины на стационарный приток 247
§ 28. Количественная расшифровка индикаторных линий . . 259
§ 29. Использование результатов исследований при расчете системы скважин 271

Глава VIII. **Неустановившийся приток к скважинам** 278

§ 30. Определение параметров пластов по неустановившемуся притоку жидкости 278
§ 31. Определение параметров пласта по результатам испытания газовых скважин при нестационарных режимах фильтрации 289
§ 32. Методы обработки данных о нестационарном притоке к скважине в усложненных условиях 299

Литература 320

Николаевский Виктор Николаевич,
Басниев Каплан Сафербиевич,
Горбунов Андрей Тимофеевич,
Зотов Герман Алексеевич

МЕХАНИКА НАСЫЩЕННЫХ
ПОРИСТЫХ СРЕД

Редактор издательства *Е. И. Латухина*
Техн. редактор *Н. В. Жидкова*
Переплет художника *Ю. Г. Асафов*
Корректор *Л. М. Кауфман*

Сдано в набор 12/XII 1969 г.
Подписано в печать 10/III 1970 г. Т-02797
Формат 60 × 90¹/₁₆. Печ. л. 21. Уч.-изд. л. 22,50
Бумага № 1. Индекс 1—4—1. Заказ 1112/658-6
Тираж 1800 экз. Цена 2 р. 43 к.

Издательство «Недра». Москва, К-12,
Третьяковский проезд, д. 1/19.

Ленинградская типография № 14
«Красный Печатник» Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Московский проспект, 91.